

問題 18 光子気体の断熱膨張

次の文中の に適切な数式または数値を書き入れよ。ただし、光速を c 、プランク定数を h とする。

(A) 半径 r の球形容器に波長 λ の光が閉じ込められている。この光を N 個の光子の集団と見なし、光子気体と呼ぶことにする。光子と容器の内壁との衝突は弾性的であり、光子と光子の衝突はないものとする。分子から成る気体と同様に、光子気体は容器の内壁に圧力をおよぼす。それを光圧あるいは放射圧という。

図 1 のように、球の中心 O を含む面内で、一つの光子が内壁との衝突を繰り返しながら回っている。光子のエネルギーは (1) で、運動量の大きさは (2) である。内壁で衝突するときの入射角を θ とすると、弾性衝突の条件から、反射角は θ となり、衝突による光子の運動量変化は、中心 O の向きに大きさが (3) となる。この光子が内壁に衝突する時間間隔は (4) であるから、時間 Δt の間の衝突回数は (5) となる。よって、時間 Δt の間に一つの光子が内壁におよぼす半径方向外向きを正とする力積の和は (6) となる。

個々の光子が運動する面の法線方向に偏りがないので、光子気体が内壁におよぼす光圧 P は (7) となる。一方、光子気体のエネルギー密度 u は (8) であるから、 P と u の間には、

$$P = \text{(9)} \times u \quad (\text{a})$$

が成り立つ。この関係式は光の波長 λ に依存しない。したがって、いろいろな波長の光を重ね合わせた光子気体に対しても式 (a) が成り立つ。

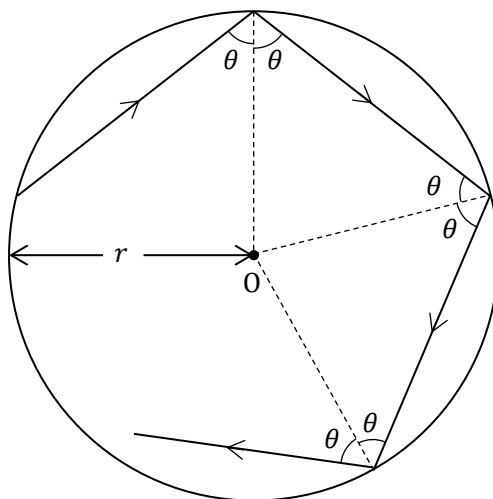


図 1

(B) 温度 T の境界面で囲まれた空間は、境界面が放射する電磁波で満たされている。境界面と電磁波が熱平衡状態にあるとき、境界面に小さな穴を開け、内部から漏れ出してくる電磁波の波長 λ とエネルギー流束密度 F を測定すると、図 2 のように、温度 T に依存する連続スペクトルになる。 F は漏れ出してくる電磁波の単位時間あたり、単位面積あたり、単位波長あたりのエネルギーである。この連続スペクトルを温度 T の空洞放射 (あるいは黒体放射) という。

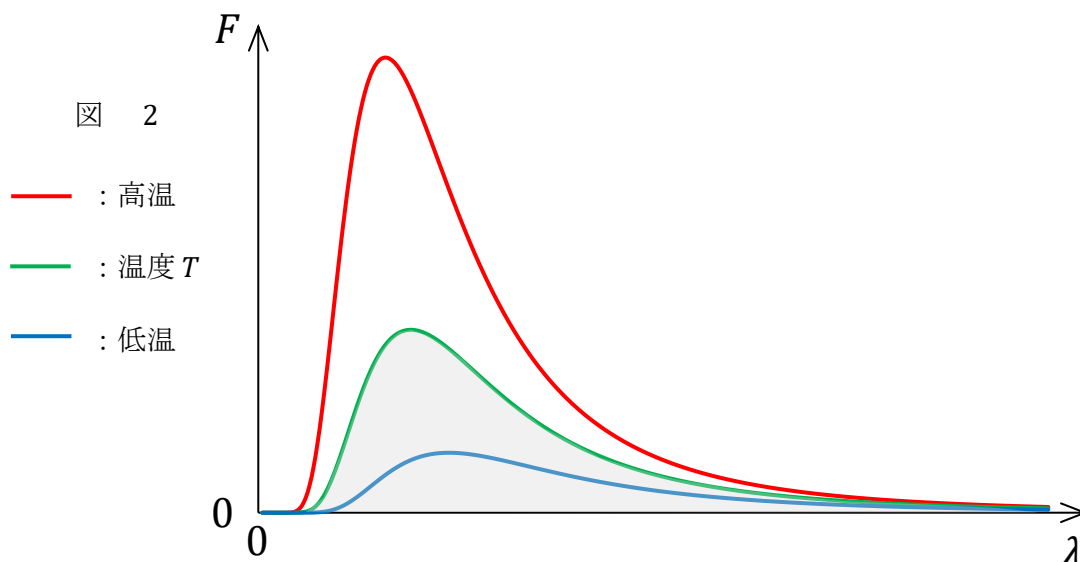


図 2 で、ある温度 T の連続スペクトルと λ 軸で囲まれた面積は、小さな穴から漏れ出してくる電磁波の単位時間あたり、単位面積あたりのエネルギーである。このエネルギーは温度が高いほど大きいので、空洞放射のエネルギー密度 u は温度 T の増加関数であることがわかる。実際、 a を定数として、

$$u = a T^4 \tag{b}$$

であることが、実験で実証され、理論計算でも証明されている。これをステファン・ボルツマンの法則という。

(C) 半径が可変の球面内に、空洞放射のスペクトルをもつ光子気体が閉じ込められている。その半径、体積、温度、光圧、エネルギー密度をそれぞれ r, V, T, P, u とする。なんらかの原因でこの球面が膨張するとき、光子気体は球面を介して外部に仕事をするが、それ以外に外部との間にエネルギーのやり取りはなく、球面がエネルギーを吸収あるいは放出することもないとする。すなわち、光子気体の膨張は断熱的であるとする。このとき、スペクトルの形は空洞放射のまま、温度だけが下がるものとする。

いま、光子気体が等方的にわずかに膨張して、その体積、光圧、エネルギー密度がそれぞれ $\Delta V, \Delta P, \Delta u$ だけ変化したとする。ただし、 $\Delta V \ll V, |\Delta P| \ll P, |\Delta u| \ll u$ である。微小量の積 $\Delta P \cdot \Delta V$ と $\Delta u \cdot \Delta V$ は無視できるとすると、熱力学第一法則より、 $V, P, \Delta V, \Delta u$ の間に、

$$P \Delta V = \Delta u \Delta V \tag{10} \tag{c}$$

が成り立つ。このとき、式 (a) と式 (c) より P を消去すれば、

$$\frac{\Delta u}{u} = \boxed{(11)} \quad (d)$$

を得る。

この光子気体は、半径 r_0 、体積 V_0 、温度 T_0 、エネルギー密度 u_0 の状態から断熱膨張を始め、状態 (r, V, T, u) になったとすれば、

$$\frac{u}{u_0} = \left(\frac{V}{V_0} \right)^{\boxed{(12)}} \quad (e)$$

が成り立つことがわかる。計算に必要ななら、 $|x| \ll 1$ のときに成り立つ近似式：

$$(1+x)^\alpha \cong 1 + \alpha x$$

を用いよ。

また、式 (b) と式 (e) より、 r, T, r_0, T_0 の間に成り立つ関係式を求めれば、

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\boxed{(13)}} \quad (f)$$

となる。

たとえば、 $T_0 = 3000 \text{ K}$ であるときに、 $T = 3 \text{ K}$ になるまで光子気体が膨張したとすれば、その半径 r は $\boxed{(14)} \times r_0$ になっていることがわかる。

さらに、体積が V のときに、球内に N 個の光子があるとし、その波長の平均値を $\bar{\lambda}$ とすれば、光子気体のエネルギー密度は、 $V, N, \bar{\lambda}, h, c$ を用いて、

$$u = \boxed{(15)}$$

と表される。最初の状態で $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_0$ であったとし、光子気体が膨張する間、 N が一定に保たれるとすれば、

$$\frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}_0} = \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\boxed{(16)}} \quad (g)$$

が成り立つ。すなわち、光子気体が断熱膨張すると、光の波長は長くなるのである。

問題 18 の解答と解説

膨張する宇宙を満たしている空洞放射の断熱冷却を想定して、この問題は作成されている。しかしながら、宇宙の膨張を論じるときに必要な一般相対論を無視しているので、ここで用いた物理的考察をそのまま宇宙に適用することはできない。そもそも、この問題で想定している特殊な球面は宇宙に存在しない。ところが、一般相対論を一様で等方的な宇宙の膨張に適用して得られる結論の一つが、この問題で用いた式 (c) の断熱膨張に対する熱力学第一法則であるので、ここで得られた式 (f) と式 (g) は、結果的には、宇宙の空洞放射に適用できる正しい式になっている。

(A)

(1), (2) 光子のエネルギー ε と運動量の大きさ $|\vec{p}|$ は、光の波長を λ として、

$$\varepsilon = \frac{c h}{\lambda} \quad (1)$$

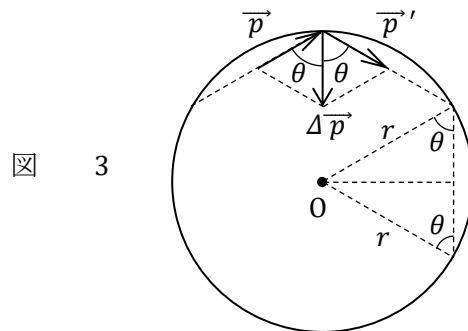
$$|\vec{p}| = \frac{h}{\lambda} \quad (2)$$

(3) 内壁との衝突前後で光子のエネルギーを $\varepsilon, \varepsilon'$ 、運動量を \vec{p}, \vec{p}' とすると、式 (1), (2) と弾性衝突の条件 ($\varepsilon' = \varepsilon$) より、

$$|\vec{p}'| = \frac{\varepsilon'}{c} = \frac{\varepsilon}{c} = |\vec{p}|$$

となる。図 3 に示すように、衝突による光子の運動量変化 $\Delta\vec{p} = \vec{p}' - \vec{p}$ の向きは中心 O に向かう向きで、その大きさは、

$$|\Delta\vec{p}| = |\vec{p}'| \cos\theta - (-|\vec{p}| \cos\theta) = 2|\vec{p}| \cos\theta = \frac{2h}{\lambda} \cos\theta \quad (3)$$



(4) 衝突の時間間隔 τ は、

$$\tau = \frac{2r \cos\theta}{c} \quad (4)$$

(5) 時間 Δt の間の衝突回数 n は、

$$n = \frac{\Delta t}{\tau} = \frac{c \Delta t}{2r \cos\theta} \quad (5)$$

(6) 衝突のときに内壁が光子におよぼす力積は $\Delta \vec{p}$ に等しいから、作用・反作用の法則より、光子が内壁におよぼす力積は半径方向外向きに大きさが $|\Delta \vec{p}|$ である。よって、時間 Δt の間に一つの光子が内壁におよぼす半径方向外向きを正とする力積成分の和 $f_r \Delta t$ は、

$$f_r \Delta t = n |\Delta \vec{p}| = \frac{c \Delta t}{2 r \cos \theta} \frac{2 h}{\lambda} \cos \theta = \boxed{\frac{c h}{r \lambda} \Delta t} \quad (6)$$

(7) N 個の光子が内壁全体におよぼす半径方向外向きの力積成分 $F_r \Delta t$ は、

$$F_r \Delta t = N f_r \Delta t = \frac{N c h}{r \lambda} \Delta t$$

である。光圧 P は球面にはたらく単位面積あたりの力であるから、

$$P = \frac{F_r}{4 \pi r^2} = \boxed{\frac{N c h}{4 \pi r^3 \lambda}} \quad (7)$$

(8) 球内の光子の全エネルギー U は $N \varepsilon$ であるから、エネルギー密度 u は、

$$u = \frac{U}{\frac{4 \pi}{3} r^3} = \boxed{\frac{3 N c h}{4 \pi r^3 \lambda}} \quad (8)$$

(9) 式 (7) と式 (8) より次式を得る。

$$P = \boxed{\frac{1}{3}} u \quad (a)$$

(C)

(10) 光子気体の全エネルギー U は、

$$U = u V$$

であるから、微小な膨張によるその変化量は、

$$\Delta U = (u + \Delta u)(V + \Delta V) - u V \cong u \Delta V + V \Delta u$$

となる。その間に光圧が外部にする仕事 ΔW は、

$$\Delta W \cong \frac{1}{2} \{P + (P + \Delta P)\} \Delta V \cong P \Delta V$$

である。これらより断熱膨張に対する熱力学第一法則は、

$$0 = \Delta U + \Delta W \cong u \Delta V + V \Delta u + P \Delta V$$

と表される。よって、

$$P \Delta V = \boxed{-u \Delta V - V \Delta u} \quad (c)$$

(11) 式 (a) の P を式 (c) に代入すれば、

$$\frac{1}{3} u \Delta V = -u \Delta V - V \Delta u$$

となる。これより次式を得る。

$$\frac{\Delta u}{u} = \boxed{-\frac{4}{3} \frac{\Delta V}{V}} \quad (d)$$

(12) 式 (d) の Δu と ΔV を微分 du と dV に置き換えて、両辺を積分すれば、

$$\int \frac{du}{u} = -\frac{4}{3} \int \frac{dV}{V} \rightarrow \log u = -\frac{4}{3} \log V + \log C \quad (\log C \text{ は積分定数})$$

$$\rightarrow u = C V^{-\frac{4}{3}}$$

となる。 $V = V_0$ のとき $u = u_0$ であるから、 $C = u_0 V_0^{\frac{4}{3}}$ よって、

$$\frac{u}{u_0} = \left(\frac{V}{V_0} \right)^{\boxed{-\frac{4}{3}}} \quad (e)$$

あるいは、次のように計算してもよい。式 (e) の関数形を認めて、未知数の指数を α とおけば、

$$\frac{u}{u_0} = \left(\frac{V}{V_0} \right)^{\alpha} \quad (9)$$

微小な膨張をしたあとは、

$$\frac{u + \Delta u}{u_0} = \left(\frac{V + \Delta V}{V_0} \right)^{\alpha} \quad (10)$$

が成り立つ。式 (10) の両辺を式 (9) の両辺で割れば、

$$\frac{u + \Delta u}{u} = \left(\frac{V + \Delta V}{V} \right)^{\alpha} \rightarrow 1 + \frac{\Delta u}{u} = \left(1 + \frac{\Delta V}{V} \right)^{\alpha} \cong 1 + \alpha \frac{\Delta V}{V}$$

$$\rightarrow \frac{\Delta u}{u} = \alpha \frac{\Delta V}{V}$$

となる。これと式 (d) を比べれば、

$$\alpha = \boxed{-\frac{4}{3}}$$

(13) 空洞放射の光子気体の場合、式 (b) より、

$$u_0 = a T_0^4, \quad u = a T^4$$

が成り立つ。これらと $V_0 = 4\pi r_0^3 / 3$, $V = 4\pi r^3 / 3$ を式 (e) に代入すれば、

$$\left(\frac{T}{T_0} \right)^4 = \left(\frac{r^3}{r_0^3} \right)^{-\frac{4}{3}} \rightarrow \frac{T}{T_0} = \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\boxed{-1}} \quad (f)$$

(14) 式 (f) に $T_0 = 3000 \text{ K}$, $T = 3 \text{ K}$ を代入すれば、

$$\frac{r}{r_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{-1} = \boxed{1000} \quad (11)$$

(15) 光子 1 個の平均のエネルギー $\bar{\varepsilon}$ は、

$$\bar{\varepsilon} = \frac{c h}{\lambda}$$

であるから、

$$U = N \bar{\varepsilon} = \frac{N c h}{\lambda}$$

よって、

$$u = \frac{U}{V} = \boxed{\frac{N c h}{V \lambda}} \quad (12)$$

(16) 題意より, 光子気体が膨張するとき N は変化しないので, 式 (12) より,

$$u_0 = \frac{N c h}{V_0 \overline{\lambda_0}} \quad (13)$$

となる。式 (12) と式 (13) の比を取れば,

$$\frac{u}{u_0} = \frac{V_0 \overline{\lambda_0}}{V \overline{\lambda}}$$

これを式 (e) に代入すれば,

$$\frac{V_0}{V} \frac{\overline{\lambda_0}}{\overline{\lambda}} = \left(\frac{V}{V_0} \right)^{-\frac{4}{3}} \rightarrow \frac{\overline{\lambda}}{\overline{\lambda_0}} = \left(\frac{V}{V_0} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\boxed{1}} \quad (g)$$

となる。

ここでは波長の平均値の変化を論じたが, 空洞放射のスペクトルの形を保ったまま光子気体が膨張することを仮定しているので, 式 (g) は平均値だけでなく, すべての波長に対して成り立つ。

空洞放射のスペクトルを用いて計算すれば, $T_0 = 3000 \text{ K}$ のとき $\overline{\lambda_0} = 1.25 \times 10^{-6} \text{ m}$ となり, 赤外線領域にある。光子気体の温度が 3 K になるまで膨張すれば, $\overline{\lambda} = 1.25 \times 10^{-3} \text{ m}$ となる。これはミリ波領域にある。

これに近いことが実際に宇宙で起こったことがわかっている。

(余談)

無から生まれた宇宙は、インフレーションによって指数関数的に膨張し、そのあとビッグバンを経て、現在は加速度的に膨張している、というのが定説である。

ビッグバン、すなわち爆発的な熱い火の玉では、最初粒子と放射が相互作用をして同じ温度であったが、膨張によって温度が下がると、プラズマ状態の粒子が再結合（実際は初結合）して中性になり、放射との相互作用が切れてしまう。そのときの温度は約 3000 K である。そのあと、放射のスペクトルは、関数形が空洞放射のまま温度だけが下がりつづけ、現在は約 2.7 K になっている。

現在の宇宙が火の玉の残り火で満たされていることは、G. Gamow によって 1946 年に予言されており、宇宙電波の測定技術の向上に伴って、その検出が計画されていたのであるが、1965 年に通信衛星からの信号に影響をおよぼす雑音を測定していたベル研究所の A. Penzias と R. Wilson によって、偶然 3.5 K の宇宙背景放射が発見された。これこそまさに、瓢箪から駒・棚から牡丹餅であった。その後の精密な測定によって、この残り火の温度は 2.725 K であることが分かっている。

本問は、再結合後の空洞放射の温度がどのように変化するかを論じたのであるが、最初に述べておいたように、その扱いは正しくない。実際には、まず宇宙の膨張があり、長さのスケール因子（宇宙の大きさを表す無次元量で、平たく言えば物差の目盛のようなもの）が大きくなるにつれて、宇宙を満たしている放射の波長も、スケール因子に比例して長くなる。そのため、個々の光子のエネルギーはスケール因子に反比例して小さくなる。一方、空洞放射の光子は粒子とほとんど相互作用をしないので、宇宙とともに膨張する任意の領域（と言っても銀河よりは大きい領域）内の光子数は変化しない。したがって、光子の個数密度はスケール因子の 3 乗に反比例して減少する。まとめれば、再結合のあと、空洞放射のエネルギー密度はスケール因子の 4 乗に反比例して小さくなる。

この結論は、本問で論じたように、ある領域内の光子気体が断熱膨張すると仮定して、熱力学第一法則から得られた結果と一致するが、宇宙の膨張を正しく扱うためには、一般相対論が必要となる。一般相対論を基本から勉強したい人は、次の入門書を読まれるとよい。宇宙論の基本事項についても簡潔に説明されている。

佐藤勝彦：岩波基礎物理学シリーズ 9 相対性理論 岩波書店 1996

[他の演習問題へ](#)