問題 17　音響光学素子によるレーザー光の回折

次の文中の $\boxed{}$ に適切な数式を書き入れよ。

(Ⅰ)

図 1 の C は厚さ w の透明な結晶板で，その中を音源 T で発生した波長 Λ の平面超音波が上向きに速さ V で伝わり，反射板 R で反射する。その結果，C 内に超音波の定常波が生じ，腹の波面を除けば，C の密度が平均密度を中心として変動する。屈折率 1 の空気側から C の左側面に波長 λ_0 のレーザー光の平面波を垂直に照射すると，C を透過したあと図のような方向に回折する。m 次の回折角を Θ_m とする。このような回折が起こる理由は，超音波の波面での密度が大きいほどレーザー光に対する屈折率が大きいので，同じ屈折率の波面が等間隔で並び，それらが回折格子の役目を果たすからである。

レーザー光が光速 c で結晶板 C を横切る時間 $\dfrac{w}{c}$ は，超音波の周期 $\dfrac{\Lambda}{V}$ に比べて十分短いので，横切る経路上の屈折率は一定と見なせる。いま，屈折率が n の波面に沿ってレーザー光が C を横切るとき，ある瞬間において，C の右側面と左側面におけるレーザー光の位相の差は $\boxed{(1)}$ である。よって，C の右側面に同位相の直線光源が等間隔 $\boxed{(2)}$ で並んでいるのと同じになる。したがって，m 次の回折角 Θ_m が満たすべき式は，$\sin\Theta_m = \boxed{(3)}$ となる。

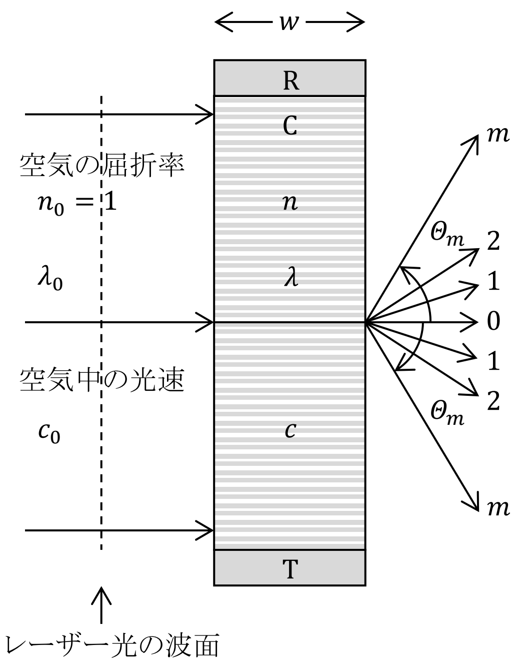


図　1
結晶板 C 内に超音波の定常波が
あるときに生じるレーザー光の回折光

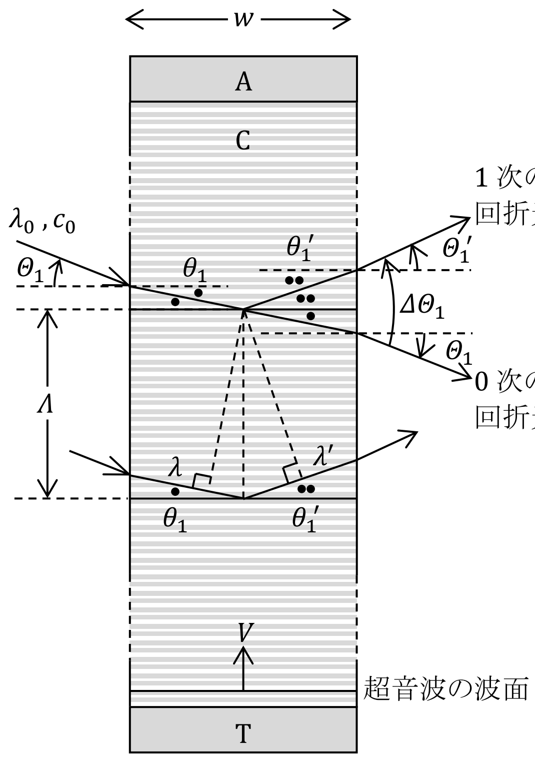


図　2
結晶板 C 内に超音波の進行波があるときに
生じるレーザー光の 0 次と 1 次の回折光
(角度 Θ_1 と波長 Λ は拡大して描いてある)

(II)

反射板 R を超音波の吸収板 A に取り替えると，C 内を上向きに速さ V で平面超音波が伝わるようになる。このとき上記のレーザー光の入射角を 0 から徐々に大きくすると，図 2 の矢印の向きの入射角が Θ_1 になったときに，透過側に 1 次の回折光が図の矢印の向きの角度 Θ_1' の方向に見える。このような回折が起こるのは，図 2 に示すように，C 内へ屈折角 θ_1 で屈折したあと，超音波のある波面で反射したレーザー光と，波長 Λ だけ離れた隣りの波面で反射したレーザー光が，C を透過したあとに遠方で重なって強め合うからである。

C 内へ屈折したレーザー光が速さ V で進行する超音波の波面で反射すると，反射レーザー光の波長 λ' は入射レーザー光の波長 λ より少し短くなる。また，反射レーザー光が波面となす角度 θ_1' は入射レーザー光が波面となす角度 θ_1 より少し大きくなる。

λ' と λ および θ_1' と θ_1 の差は微小なので，最初は $\lambda' = \lambda$，$\theta_1' = \theta_1$ として，近似的に Θ_1 を求めることにする。また，結晶板 C の屈折率 n は上述のように場所によって異なるが，その変化量は微小なので，以下では超音波の有無に関係なく，n は一定とする。このような場合，C の両側面でのレーザー光の屈折に対して $\boxed{(4)}$ が成り立つ。

次に，隣り合う 2 つの同位相の波面で反射した 2 つのレーザー光が遠方で重なって強め合う条件を，Λ，θ_1，λ を用いて表せば $\boxed{(5)}$ となり，Λ，Θ_1，λ_0 で表せば $\boxed{(6)}$ となる。Λ と λ_0 が既知であれば，この式から Θ_1 を求めることができる。

超音波の波面で反射せずに直進し，C の右側面で屈折して C から出て来るレーザー光を 0 次の回折光という。0 次と 1 次の回折光がなす角度 $\Delta\Theta_1$ は $\boxed{(7)}$ となる。ただし，Θ_1 を微小角として，近似式 $\sin\Theta_1 \fallingdotseq \Theta_1$ を用いて計算せよ。

結晶板 C の厚さ w が大きい場合には，2 次以上の回折光が見えることもある。0 次の回折光から測って，角度 $\Delta\Theta_m$ の方向に m 次の回折光が見えるとき，$\Delta\Theta_m$ が微小角であれば，$\Delta\Theta_m =$ $\boxed{(8)}$ $\times \Delta\Theta_1$ となる。

(III)

次に，$\lambda' = \lambda$，$\theta' = \theta$ と見なせない場合について考える。θ と θ' は入射レーザー光と反射レーザー光が超音波の波面となす角度である。図 3 のように，超音波の波面 P の面上で距離 X だけ離れた 2 点 A′ と B″ で反射した 2 つのレーザー光が，結晶板 C を透過し，遠くで重なって強め合うとき，X，λ，λ'，θ，θ' と整数 m の間に，$\boxed{\quad(9)\quad}$ が成り立つ。この式が X に関係なく成り立てば，波面 P で反射したすべてのレーザー光が強め合うことになる。そのとき，λ，λ'，θ，θ' の間に，$\boxed{\quad(10)\quad}$ が成り立つ。

さらに，図 2 に示されているように，超音波の隣り合う同位相の波面で反射した 2 つのレーザー光が C を透過し，遠くで重なって強め合い，1 次の回折光になったとすれば，λ，λ'，θ，θ'，Λ の間に，$\boxed{\quad(11)\quad}$ が成り立つ。

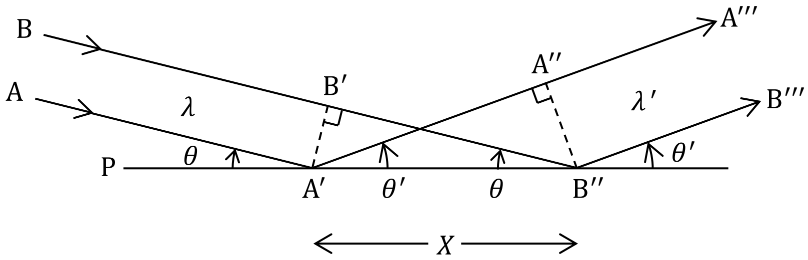


図 3　超音波の進行する波面 P で反射する 2 つのレーザー光

(IV)

図 4 のように，速さ V で進行する超音波の波面 P で波長 λ のレーザー光が反射するとき，その波長が λ' に変化するのはドップラー効果のためである。$V \ll c$ であれば，光のドップラー効果は音のドップラー効果と同じように扱える。このとき，波面 P が受け取るレーザー光の振動数 f_{P} は $\boxed{\quad(12)\quad}$ となる。そして P がこのレーザー光を反射するとき，P は振動数 f_{P} の光源と見なせるので，結晶板 C 内でこの反射レーザー光を受け取れば，その波長 λ' は，λ，c，V，θ，θ' を用いて，$\boxed{\quad(13)\quad}$ と表される。

式 (11) と式 (13) を用いれば，反射レーザー光の振動数と入射レーザー光の振動数の差は，V と Λ を用いて，$\boxed{\quad(14)\quad}$ と表される。

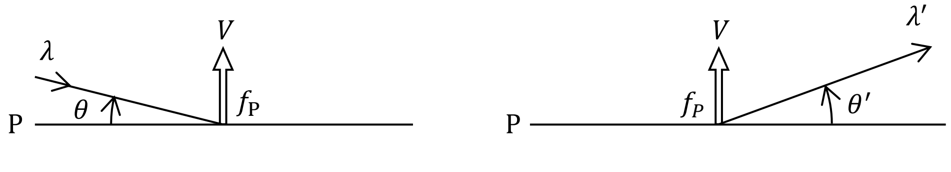


図 4　速さ V で進行する超音波の波面 P に入射するレーザー光と反射するレーザー光

問題 17 の解答と解説

結晶中の進行超音波によってレーザー光を回折させる素子を音響光学素子という。回折光の向きと波長は入射レーザー光の向きと波長からずれており，そのずれは超音波の波長と音速に依存する。ここでは論じないが，その強さは超音波の強さに比例する。これらの性質を用いてレーザー光の偏向・変調・分光などを扱うさまざまな機器が考案され，実用化されている。

(Ｉ)

(1)　結晶板中でのレーザー光の波長 λ は λ_0 / n で，1 波長分の長さが位相差 2π に相当するから，求める位相差 $\Delta\phi_n$ は次のようになる。

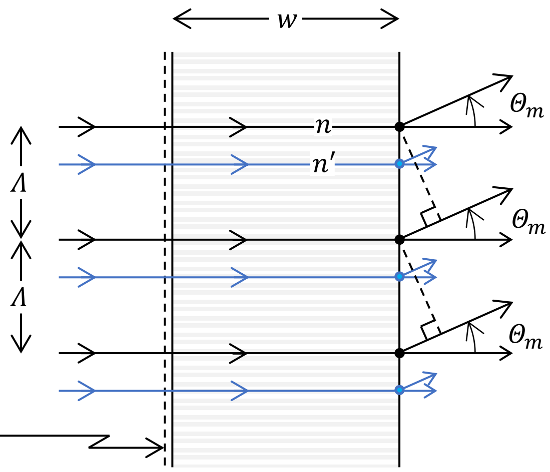
$$\Delta\phi_n = 2\pi\frac{w}{\lambda} = \boxed{2\pi\frac{n\,w}{\lambda_0}}$$

(2)　超音波の同位相の波面は間隔 Λ で並んでいるので，C の屈折率が同じになる波面は等間隔 Λ で並ぶ。C の左側面ではレーザー光の位相 ϕ はどこでも同じであるが，右側面で同じ位相 $\phi + \Delta\phi_n$ になるところは間隔 $\boxed{\Lambda}$ の平行直線となり，そこから同位相の素元波が広がっていく。

異なる屈折率 n' の波面を考えれば，図 5 のように，C の右側面で，n の場合の平行光源を全体的に少しずらした平行光源となる。

図 5

- ($\color{blue}{\bullet}$) は紙面に垂直な同位相の平行光源
- $\bullet$ と $\color{blue}{\bullet}$ は位相が異なる。



レーザー光の位相 ϕ の波面

(3)　上記の素元波が Θ_m 方向の遠方で重なって強め合う条件は次のようになる。

$$\text{経路差}\ \Lambda\sin\Theta_m = m\,\lambda_0 \quad\rightarrow\quad \sin\Theta_m = \boxed{m\frac{\lambda_0}{\Lambda}} \qquad ①$$

(II)

(4)　屈折の法則より次式が成り立つ。

$$\boxed{n\sin\theta_1 = \sin\Theta_1} \qquad ②$$

(5)　これら 2 つのレーザー光は，C の両側面での屈折によって位相差を生じないが，超音波の隣り合う同位相の波面で反射するので，$2\Lambda\sin\theta_1$ だけ経路差が生じる。よって，これら 2 つのレーザー光が遠方で重なって強め合い，1 次の回折光が生じる条件は，

$$2\,\pi\,\frac{2\,\Lambda\sin\theta_1}{\lambda}=2\,\pi\times 1\quad\rightarrow\quad \boxed{2\,\Lambda\sin\theta_1=\lambda} \qquad ③$$

となる。この考え方は結晶格子によるX線のブラッグ反射と同じである。

(6) 式③の両辺をn倍して，式②と$\lambda=\dfrac{\lambda_0}{n}$を用いれば，

$$\boxed{2\,\Lambda\sin\Theta_1=\lambda_0} \qquad ④$$

を得る。このように，回折条件を表す式は，結晶板Cの外側の角度Θ_1と波長λ_0で表しても，内側の角度θ_1と波長λで表した式と同じ形になる。

(7) 0次の回折光と結晶板の法線がなす角度はΘ_1であるから，0次と1次の回折光がなす角度$\Delta\Theta_1$は次のようになる。

$$\Delta\Theta_1=2\,\Theta_1\fallingdotseq 2\sin\Theta_1=\boxed{\frac{\lambda_0}{\Lambda}}$$

(8) 超音波の波面に対して角度θ_mの方向に反射されたレーザー光がm次の回折光になるとすると，

$$\Lambda\sin\theta_1+\Lambda\sin\theta_m=m\,\lambda$$

が成り立つ。これと式②と微小角のときに成り立つ近似式$\sin\Theta_m\fallingdotseq\Theta_m$を用いれば，

$$\begin{aligned}\Delta\Theta_m&=\Theta_1+\Theta_m\fallingdotseq\sin\Theta_1+\sin\Theta_m=n\,(\,\sin\theta_1+\sin\theta_m\,)\\&=n\,\frac{m\,\lambda}{\Lambda}=m\,\frac{\lambda_0}{\Lambda}=\boxed{m}\,\Delta\Theta_1\end{aligned}$$

を得る。この式は(I)の場合の式①と同じ形をしている。これについては，あとで(**注2**)で説明する。

(III)

(9) 経路A A′ A″ A‴と経路B B′ B″ B‴を通る2つのレーザー光の位相差は次のように表される。

$$2\,\pi\,\frac{\overline{\mathrm{B}'\,\mathrm{B}''}}{\lambda}-2\,\pi\,\frac{\overline{\mathrm{A}'\,\mathrm{A}''}}{\lambda'}=2\,\pi\left(\frac{X\cos\theta}{\lambda}-\frac{X\cos\theta\,'}{\lambda'}\right)$$

これが$2\,\pi$の整数倍であれば，2つのレーザー光は重なって強め合う。よって求める条件式は，

$$\boxed{X\left(\frac{\cos\theta}{\lambda}-\frac{\cos\theta\,'}{\lambda'}\right)=m} \qquad ⑤$$

となる(**注1**)。

(10) 式⑤が任意のXに対して成り立つのは$m=0$のときで，そのとき次式が成り立つ。

$$\boxed{\frac{\cos\theta}{\lambda}=\frac{\cos\theta\,'}{\lambda'}} \qquad ⑥$$

(11) 1次の回折光が生じるのは，2つの反射レーザー光の位相差が$2\,\pi$のとき，言い換えれば，2つの反射レーザー光の経路上にある波の数(1波長分の波を1個と数える)の差が1のときである。よって，求める条件式は次のようになる。

$$\boxed{\frac{\Lambda\sin\theta}{\lambda}+\frac{\Lambda\sin\theta\,'}{\lambda'}=1} \qquad ⑦$$

式 ⑥ と式 ⑦ を連立させ，λ' と θ' を未知数として解くことができるが，その解から λ' と θ' が λ と θ からずれる物理的意味を考えるのは，式が複雑で見通しが悪い。λ' と λ の差は，次節で述べるようにドップラー効果に起因するのだが，それも含めて，別の見方で式 ⑥ と式 ⑦ の物理的意味と θ' が θ からずれる理由を，（**注 2**）と（**注 3**）で説明する。

（IV）

(12)　波面 P へ入射するレーザー光の振動数は，$f=\dfrac{c}{\lambda}$ で，速さ V の波面 P とともに動く観測者は，入射レーザー光が伝わる向きと逆の向きに大きさ $V\sin\theta$ の速度成分をもつので，ドップラー効果により，次式が成り立つ。

$$f_{\mathrm{P}}=\frac{c+V\sin\theta}{c}\,f=\boxed{\frac{c+V\sin\theta}{\lambda}} \qquad ⑧$$

(13)　波面 P は振動数 f_{P} のレーザー光を発する光源と見なせる。この光源は反射レーザー光が伝わる向きに大きさ $V\sin\theta'$ の速度成分をもつので，C に対して静止している観測者が受け取る反射レーザー光の振動数 f' は，

$$f'=\frac{c}{c-V\sin\theta'}\,f_{\mathrm{P}}=\frac{c+V\sin\theta}{c-V\sin\theta'}\,\frac{c}{\lambda} \qquad ⑨$$

となる。よって，反射波の C 内での波長は，

$$\lambda'=\frac{c}{f'}=\boxed{\frac{c-V\sin\theta'}{c+V\sin\theta}\,\lambda} \qquad ⑩$$

となる。この式は異なる考え方をもとにして導くこともできる（**注 3**）。

(14)　式 ⑩ を変形すれば，

$$\frac{c}{\lambda'}-\frac{c}{\lambda}=\frac{V\sin\theta'}{\lambda'}+\frac{V\sin\theta}{\lambda}$$

となる。これと式 ⑦ より，

$$f'-f=\boxed{\frac{V}{\Lambda}} \qquad ⑪$$

を得る。右辺は超音波の振動数 $F=\dfrac{V}{\Lambda}$ に等しい（**注 2**）。

(注 1)

式 ⑤ に疑問をもつ人がいるのかもしれないので，追加説明をしておく。図 6 のように，入射レーザー光の波面 A′ B′ の A′ 端が超音波の波面 P に達した時刻を $t = 0$ とする。波面 P は動いているので，B′ 端が波面 P に達するのは点 B″ ではなく，図 6 の点 b″ であり，面 a″ b″ が反射レーザー光の波面となる。その時刻を $t = \Delta t$ とすれば，

$$\overline{\mathrm{A'\,a''}} = c\,\Delta t = \overline{\mathrm{B'\,b''}}$$

であり，図 6 に示されている A′ b″ 間の波面 P に平行な方向の距離 x は，

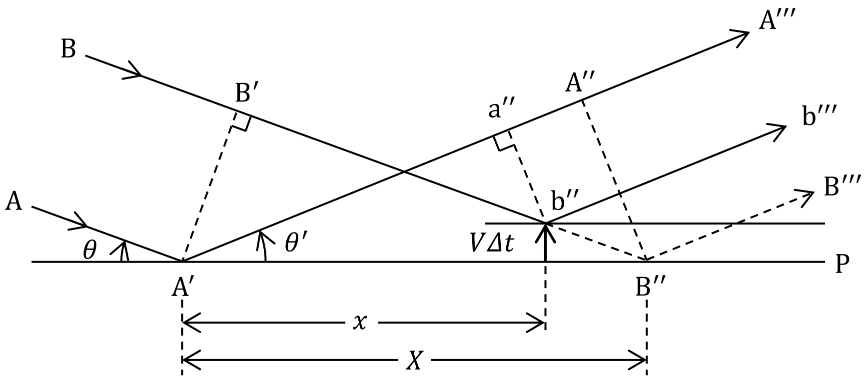
$$x = \frac{\overline{\mathrm{A'\,a''}} - V\,\Delta t \sin\theta\,'}{\cos\theta\,'} = \frac{\overline{\mathrm{B'\,b''}} + V\,\Delta t \sin\theta}{\cos\theta}$$

と表される。この問題では暗黙のうちに，$V \ll c$ かつ θ，$\theta\,'$ は微小角であることを仮定しているので，上式の分子の第 2 項は無視できる。よって，

$$\overline{\mathrm{A'\,a''}} = x\cos\theta\,' \qquad \overline{\mathrm{B'\,b''}} = x\cos\theta$$

となる。本来なら X の代わりに x を用いるべきだが，$\dfrac{V}{c} \to 0$ の極限を想定して，$x = X$ としているのである。

図 6



(注 2)

式 ⑪ は単純な式なので，背後に特別な物理的意味がありそうである。

光波は電磁場の振動が真空中や物質中を伝わる現象で，その振動を量子化したものが光子 (フォトン, photon) である。同じように，結晶格子の中を伝わる音波による格子振動を量子化したものを音子 (フォノン, phonon) という。光波の波長が λ，振動数が f であれば，光子のエネルギー ϵ と運動量の大きさ p は，それぞれ，

$$\epsilon = h\,f = \frac{h\,c}{\lambda}\ , \qquad p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h\,f}{c}$$

と表される。h はプランク定数である。同様に，音波の波長が Λ，振動数が F，音速が V であれば，音子のエネルギー E と運動量の大きさ P は，それぞれ，

$$E = h\,F = \frac{h\,V}{\Lambda}\ , \qquad P = \frac{h}{\Lambda} = \frac{h\,F}{V}$$

と表される。

図 2 のように，レーザー光が超音波の進行波面で反射するとき，微視的に見れば，図 7 のように，1 個の入射光子 $(\epsilon,\ p)$ が 1 個の音子 $(E,\ P)$ を吸収して，1 個の反射光子 $(\epsilon',\ p')$ になると考えればつじつまが合う。この吸収において，エネルギーと運動量が保存されると考えれば，エネルギー保存則より，

$$\frac{h\,c}{\lambda'} = \frac{h\,c}{\lambda} + \frac{h\,V}{\Lambda} \qquad \text{(a)}$$

が成り立ち，運動量保存則の x 成分と y 成分より，

$$\frac{h}{\lambda'}\cos\theta' = \frac{h}{\lambda}\cos\theta \qquad \text{(b)}$$

$$\frac{h}{\lambda'}\sin\theta' = \frac{h}{\Lambda} - \frac{h}{\lambda}\sin\theta \qquad \text{(c)}$$

が成り立つ。このとき，式 (b) から，

$$\frac{\cos\theta'}{\lambda'} = \frac{\cos\theta}{\lambda} \qquad \text{(d)}$$

すなわち，(III) の式 ⑥ が導かれ，式 (c) から，

$$\frac{\sin\theta'}{\lambda'} + \frac{\sin\theta}{\lambda} = \frac{1}{\Lambda} \qquad \text{(e)}$$

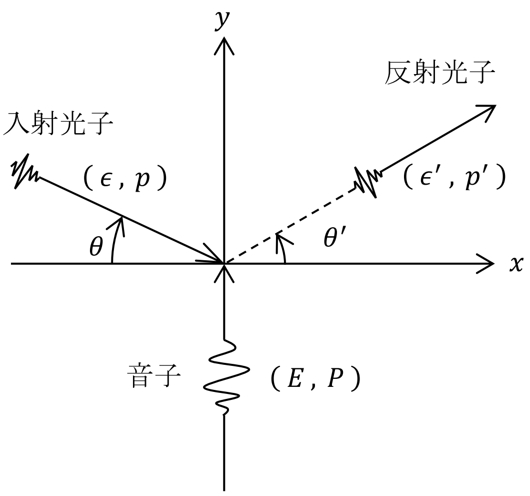


図　7

すなわち，(III) の式 ⑦ が導かれる。そして，式 (a) を振動数を用いて書き換えれば，

$$f' - f = F \qquad \text{(f)}$$

すなわち，(IV) の式 ⑪ になるのである。

光子が音子を吸収する確率が小さい場合，ほとんどの光子は結晶板を素通りして 0 次の回折光となる。1 つの音子を吸収した光子が弱い 1 次の回折光となるが，その光子が結晶板を通り抜けるまえにもう一度音子を吸収すれば，その光子はさらに弱い 2 次の回折光となる。吸収確率が大きい場合，または結晶板の厚さが大きい場合に，2 次以上の回折光が観測される。

結晶板中に超音波の定常波が生じているときのレーザー光の回折も，音子との相互作用による光子の散乱として説明することができる。このような散乱をブリルアン (Brillouin) 散乱という。

(注 3)

ドップラー効果と光行差の公式が，**(注 2)** のブリルアン散乱で得られた式 (a)，(d)，(e) を用いて導出できることを示す。

まず，式 (e) と式 (a) から h と Λ を消去すれば，

$$\frac{\sin\theta'}{\lambda'} + \frac{\sin\theta}{\lambda} = \frac{1}{\Lambda} = \frac{c}{V}\left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda}\right)$$

を得る。これを変形すれば，

$$\frac{1}{\lambda'}\left(1 - \frac{V}{c}\sin\theta'\right) = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{V}{c}\sin\theta\right) \ \rightarrow\ \lambda' = \frac{c - V\sin\theta'}{c + V\sin\theta}\,\lambda \qquad \text{(g)}$$

すなわち，式 ⑩ のドップラー効果の式となる。

次に，式 (d) と式 (g) より，$\dfrac{\lambda'}{\lambda}$ を消去すると，

$$\frac{\cos\theta'}{\cos\theta}=\frac{\lambda'}{\lambda}=\frac{1-\beta\sin\theta'}{1+\beta\sin\theta} \tag{h}$$

を得る。ただし，$\beta=\dfrac{V}{c}$ で，$\beta\ll 1$ が成り立つことを暗黙のうちに仮定している。そうでないと相対論の問題になってしまう。

$\beta\ll 1$ の場合，$\delta=\theta'-\theta$ は微小角であるので，

$$\sin\delta \fallingdotseq \delta\,,\quad \cos\delta \fallingdotseq 1$$

としてよい。このとき式 (h) は，

$$\frac{\cos\theta-\delta\sin\theta}{\cos\theta}\fallingdotseq\frac{1-\beta\,(\,\sin\theta+\delta\cos\theta\,)}{1+\beta\sin\beta}$$

と近似できる。これより δ を求め，$\beta^2=0$ と近似すれば，

$$\delta\fallingdotseq\frac{2\,\beta\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta-\beta\cos\theta}\fallingdotseq 2\,\beta\cos\theta=2\,\frac{V\cos\theta}{c}$$

となる。これは δ が光行差によって生じることを示している。それを以下で説明する。

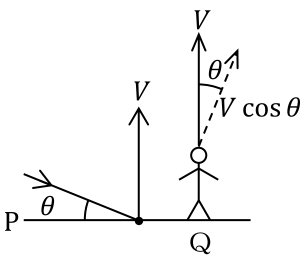


図　8 a

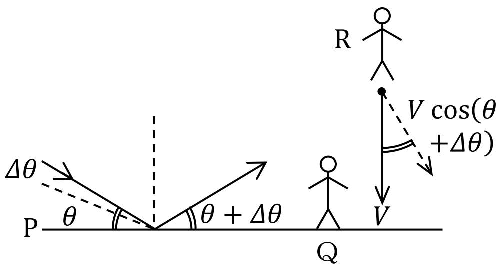


図　8 b

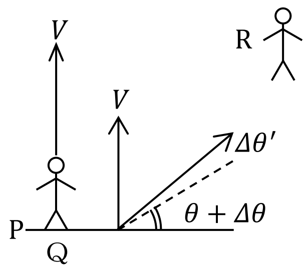


図　8 c

図 8 a のように，超音波の波面 P とともに動く観測者を Q とする。Q は入射レーザー光に垂直な速度成分 $V\cos\theta$ をもつ。そのため光行差によって，図 8 b のように，Q には入射レーザー光が波面 P と角度$\theta+\varDelta\theta$ をなす方向から来るように見える。ただし，$\varDelta\theta=\dfrac{V\cos\theta}{c}$ である。そして反射の法則により，反射レーザー光は波面 P と角度 $\theta+\varDelta\theta$ をなす方向に出て行くように見える。この反射光を Q に対して下向きに速さV で動く観測者 R が見れば，R は反射レーザー光に垂直な速度成分 $V\cos(\,\theta+\varDelta\theta\,)$ をもつので，図 8 c のように，このレーザー光は波面 P と角度 $\theta+\varDelta\theta+\varDelta\theta'$ をなす方向から来るように見える。ただし，$\varDelta\theta'=\dfrac{V\cos(\,\theta+\varDelta\theta\,)}{c}$ である。ところが，R は結晶板に対して静止しているので，結晶板から見た反射レーザー光は，波面 P に対して角度 ：

$$\theta'=\theta+\varDelta\theta+\varDelta\theta'\fallingdotseq\theta+2\,\varDelta\theta=\theta+2\,\frac{V\cos\theta}{c}$$

だけ傾くことになる。よって，δ は次のように表される。

$$\delta=\theta'-\theta=2\,\frac{V\cos\theta}{c}$$

(余談)

宇宙電波望遠鏡に設置された音響光学分光器 (Acousto– Optic Spectrometer) は，故海部宣男氏が中心になって開発・製作され，多くの星間分子の発見・大質量ブラックホールの発見・原始星のガス円盤の発見などで大きな成果をあげた。

通常の回折格子による分光では，格子定数が一定で，観測する光がさまざまな波長成分の重ね合わせになっている。この光が回折格子を通過すると，成分ごとに異なる方向に回折するので，その強度を測定することによってスペクトルが得られる。

ところが A O S では，入射レーザー光の波長は一定で，望遠鏡で集められた電波信号が周波数変換されたあと，図 2 の音源 T (一般的には Transducer という) に電圧としてかけられ，結晶板 C の中を伝わる超音波となる。この超音波は電波源ごとにさまざまな波長成分をもっており，各波長 Λ に格子定数 Λ の回折格子が対応する。すなわち，結晶板 C はさまざまな格子定数の回折格子の重ね合わせになる。電波強度の強い波長成分に対応する回折格子ほどレーザー光をよく回折するので，回折光全体を CCD で測定すると，電波源のスペクトルが得られるのである。

1991 年，M 106 銀河の中心から放射される強い H_2O メーザーの時間変化を調べるために，中井直正氏は 45 m ミリ波望遠鏡で観測した。その際，広帯域で測定しなくても観測目的に支障がなかったのであるが，使える広帯域用の A O S を使わないのはもったいないので，それも組み込んで観測してみると，目的の波長成分から大きくずれた成分が見つかった。これをブラックホールの周辺にある降着円盤の高速回転によるドップラー変位として，ブラックホールの質量を求めると，太陽質量の 3900 万倍であることがわかった。大質量ブラックホールの存在を観測によって明らかにしたのは，これが初めてである。まさに「棚から牡丹餅」であった。すべての銀河中心に大質量ブラックホールが存在すると予言した故 Lynden– Bell 氏からは，喜びと祝福の手紙が送られてきたという。

現在では，光学系の調整の難しさなどもあって，A O S は使われていない。それに代わって，入力信号電圧の自己相関関数のフーリエ成分を高速コンピューターで数値計算することによって，そのスペクトル強度を求めている。研究者一世代の間に，A O S は誕生・成長・活躍・引退の道をたどったのである。

他の演習問題へ