

## 問題 16 星のまたたき

天体観測における大気の影響を、図 1 に示すような単純化された大気モデルを用いて考察する。この大気モデルは、屈折率  $n_1$  の理想気体からなる上層大気と、屈折率  $n_2$  の理想気体からなる下層大気で構成されている。また、上層大気の上は真空である。地表は平面とし、真空と上層大気の境界面は平面で地表面に平行であるとする。また、上層大気と下層大気の境界面は図 1 のように大気の厚さに比べて小さな振幅で上下に波打っているものとする。

この大気を通して、天頂から角度  $\alpha$  方向の無限遠にある星  $S$  を地表から観測することを考える。以下の問いに答えよ。また、結果だけでなく考え方や計算の過程も記せ。

ただし、以下では大気の屈折率を真空の屈折率  $n_0 = 1$  との差である屈折指数を用いて表す。すなわち、上層大気の屈折指数  $N_1$  と下層大気の屈折指数  $N_2$  は、それぞれ  $N_1 \equiv n_1 - 1$ ,  $N_2 \equiv n_2 - 1$  で定義される。また解答においては、 $|\delta| \ll 1$  が成り立つ場合の近似式、 $\sin \delta \doteq \delta$ ,  $\cos \delta \doteq 1$ ,  $\tan \delta \doteq \delta$  を用いてもよい。

( $N_1 \equiv n_1 - 1$ ,  $N_2 \equiv n_2 - 1$  はそれぞれ  $N_1 = n_1 - 1$ ,  $N_2 = n_2 - 1$  と同義である。)

(1) はじめに、真空と上層大気の境界での屈折を考えよう。いま、角度  $\alpha$  で入射した星  $S$  からの光は真空と上層大気の境界で屈折し、その角度が  $\delta_1$  だけ変化した。 $\delta_1$  を  $N_1$  と  $\alpha$  を用いて表せ。ただし、 $|\delta_1| \ll 1$  とせよ。

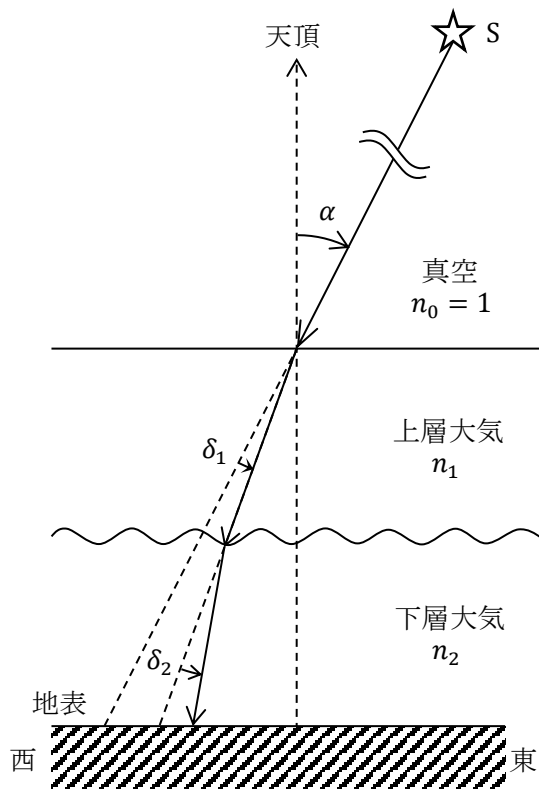


図 1

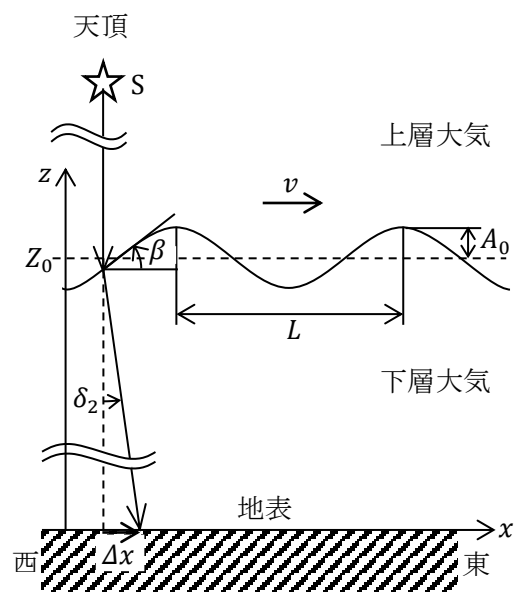


図 2

(2) 大気の屈折指数は大気の密度に比例することが知られている。いま、下層大気の圧力、温度、屈折指数がそれぞれ  $P_2 = 1.0 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ ,  $T_2 = 290 \text{ K}$ ,  $N_2 = 3.0 \times 10^{-4}$  であり、上層大気の圧力と温度が  $P_1 = 0.95 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ ,  $T_1 = 285 \text{ K}$  であるとき、上層大気の屈折指数  $N_1$  を求めよ。ただし、上層大気と下層大気は同じ種類の理想気体であるとして考えよ。

(3) 次に  $N_1 < N_2$  の条件で、天頂にある星  $S$  を観測する場合を考察しよう。図 2 はある時刻  $t$  での上層大気と下層大気の境界の拡大図である。図 2 において、 $x, y, z$  軸は、それぞれ東向き、紙面に垂直な北向き、天頂方向にとっており、その原点は地表にある。境界の形状は、図のように  $x$  軸方向には振幅  $A_0$  で波長  $L$  の正弦波で表され、 $y$  軸方向の位置にはよらないものとする。また、 $z_0$  は地表から測った境界の高さの平均値であり、 $z_0 \gg A_0$  が成り立っている。さらに、境界付近では風が吹いており、境界は形状を保ったまま  $x$  軸方向に速度  $v$  で水平に移動しているものとする。無限遠にある星  $S$  からの光は平行光と考えられることに注意して、以下の問いに答えよ。

ただし、観測中に星の位置は動かないものとする。また、図 2 に示したように、境界上のある点での境界面の地表面に対する傾き角を  $\beta$ 、屈折による星からの光の角度のずれを  $\delta_2$  と表し、どちらも図 2 に示した向きを正とする。ただし  $|\delta_2| \ll 1$  であり、さらに、星  $S$  からの光が地表に達したときの屈折による  $x$  方向のずれを  $\Delta x$  とすると、 $\Delta x \ll L$  が成り立つものとする。

- (a)  $|\delta_2| \ll 1$  であることを使って、 $\delta_2$  を  $N_1, N_2, \beta$  を用いて表せ。
- (b)  $L = 4.0 \text{ m}$ ,  $v = 10 \text{ m/s}$  の場合に、 $L$  に比べて十分小さい口径（対物レンズの直径）の望遠鏡を地表の  $x = 0.0 \text{ m}$  の位置に設置して星  $S$  を観測した。この時、観測者から見える星  $S$  の天頂方向から測った角度を  $\delta$  として、その時間変化を表す曲線の概略を下のグラフに記入せよ。ただし、 $xz$  断面における境界の接線の傾きは、時刻  $t$ 、座標  $x$  において

$$-\frac{2\pi}{L} A_0 \sin 2\pi \left( \frac{x - vt}{L} \right)$$

で表される。また、 $\delta$  は東側に見える場合を正とし、その最大値を  $\delta_{\max}$  とせよ。さらに、 $\Delta x \ll L$  であるから、ずれ  $\Delta x$  による境界の接線の傾きの違いは無視せよ。

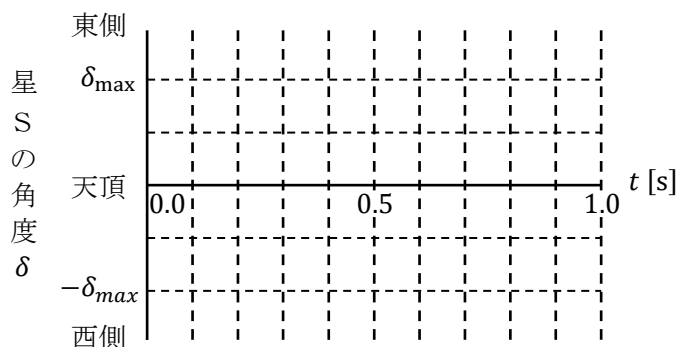


図 3

- (c) 今度は  $L$  に比べて大きい口径の望遠鏡を使用して天頂の星  $S$  を観測する場合を考える。この場合に観測される星  $S$  の形状を考え方や理由とともに答えよ。ただし、望遠鏡の精度は十分高く、大気のない条件では星は大きさのない点として観測されるものとする。

問題 16 の筆者による解答と解説

星がまたたく理由を考える問題である。出典は東北大学の 2004 年度入試問題である。

(1) 真空と上層大気境界での屈折に対して、屈折の法則：

$$n_0 \sin \alpha = n_1 \sin (\alpha - \delta_1) \quad (1)$$

が成り立つ。 $\delta_1$  は微小角であるから、式 (1) は次のように近似できる。

$$\begin{aligned} 1 \cdot \sin \alpha &= (1 + N_1)(\sin \alpha \cos \delta_1 - \cos \alpha \sin \delta_1) \\ &\approx (1 + N_1)(\sin \alpha - \delta_1 \cos \alpha) \end{aligned}$$

これより  $\delta_1$  を求めれば、

$$\delta_1 \approx \frac{N_1}{1 + N_1} \tan \alpha \quad (2)$$

となる。 $|\delta_1| \ll 1$  であるから、 $|N_1| \ll 1$  である。よって、式 (2) はさらに近似できて、

$$\delta_1 \approx \boxed{N_1 \tan \alpha} \quad (3)$$

となる。

(2) 圧力  $P$ 、温度  $T$ 、密度  $\rho$  の大気の状態方程式は、単位物質あたり空気の質量を  $\mu$ 、気体定数を  $R$  として、

$$P = \frac{R}{\mu} \rho T$$

と表される。問題文にあるように、屈折指数  $N$  は密度  $\rho$  に比例するので、

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{P_1 / T_1}{P_2 / T_2} \quad \leftrightarrow \quad N_1 = N_2 \frac{P_1}{P_2} \frac{T_2}{T_1} \quad (4)$$

が成り立つ。ただし、 $\rho_1$  と  $\rho_2$  はそれぞれ、上層大気と下層大気の密度である。問題文に与えられている数値を式 (4) に代入すれば、

$$N_1 = 3.0 \times 10^{-4} \times \frac{0.95 \times 10^5 \text{ N/m}^2}{1.0 \times 10^5 \text{ N/m}^2} \times \frac{290 \text{ K}}{285 \text{ K}} = \boxed{2.9 \times 10^{-4}} \quad (5)$$

となる。

(3)(a) 上層大気と下層大気境界で屈折するとき、入射角は  $\beta$  で屈折角は  $\beta - \delta_2$  であるから、屈折の法則は、

$$n_1 \sin \beta = n_2 \sin (\beta - \delta_2) \quad (6)$$

と表される。 $|\delta_2| \ll 1$  のときに成り立つ近似式と屈折指数  $N_1, N_2$  を用いて、式 (6) を書き換えれば、

$$\begin{aligned} (1 + N_1) \sin \beta &= (1 + N_2)(\sin \beta \cos \delta_2 - \cos \beta \sin \delta_2) \\ &\approx (1 + N_2)(\sin \beta - \delta_2 \cos \beta) \end{aligned}$$

となる。これより  $\delta_2$  を求め、さらに  $N_1, N_2 \ll 1$  を用いて近似すれば、

$$\delta_2 \approx \frac{N_2 - N_1}{1 + N_2} \tan \beta \approx \boxed{(N_2 - N_1) \tan \beta} \quad (7)$$

を得る。

(3)(b) 上層大気と下層大気の境界面の  $x$  方向の接線の傾き  $\tan \beta$  は、問題文に与えられており、 $x = 0.0 \text{ m}$  の地表から天頂を見上げたとき、時間的に次のように変化する。

$$\tan \beta = -\frac{2\pi}{L} A_0 \sin 2\pi \left( \frac{0.0 \text{ m} - vt}{L} \right) \quad (8)$$

問題文に与えられている数値： $L = 4.0 \text{ m}$ 、 $v = 10 \text{ m/s}$  を式 (8) に代入すれば、

$$\tan \beta = \frac{2\pi}{L} A_0 \sin 2\pi \left( \frac{t}{0.40 \text{ s}} \right)$$

となる。

式 (7) からわかるように、 $(N_2 - N_1) > 0$  の場合、 $0 < \beta < \pi/2$ 、 $\tan \beta > 0$  であれば、 $\delta_2 > 0$  となり、星 S は天頂より西側に見える。東側に見えるときに  $\delta > 0$  となるように、 $\delta = -\delta_2$  とおけば、

$$\begin{aligned} \delta &= -(N_2 - N_1) \tan \beta \\ &= -(N_2 - N_1) \frac{2\pi}{L} A_0 \sin 2\pi \left( \frac{t}{0.40 \text{ s}} \right) \end{aligned}$$

となる。さらに、 $\delta$  の最大値を  $\delta_{\max}$  とおけば、

$$\delta = -\delta_{\max} \sin 2\pi \left( \frac{t}{0.40 \text{ s}} \right)$$

を得る。これをグラフで表せば、図 3 のようになる。

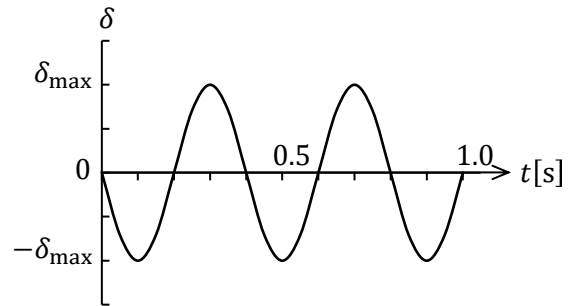


図 3

(補足 1)

望遠鏡の口径  $D$  は波長  $L$  に比べて十分小さいと仮定しているので、望遠鏡に入射する光の波面は水平面に対して角度  $\delta$  だけ傾いており、その傾きは周期  $0.4 \text{ s}$  で変化する。 $\delta$  は微小角であるから、この傾いた波面は鉛直に立てた望遠鏡内を光軸にほぼ平行に進み、屈折や反射をしながら観測者の目に到達する。そして星 S は点光源として観測される。

人間の場合、視覚の時間分解能は  $0.02$  秒程度であるから、図 3 のような点光源の方向変化は目で追いかけることができる。したがって、この望遠鏡で星 S を観測すると、東西方向に振幅  $\delta_{\max}$  で点光源が振動しているように見える。

実際の大気は乱流状態になっており、空気の屈折率は空間的にも時間的にも乱雑に変化している。そのため、大気の上表面に入射したときには平面であった星の光の波面は、地面に達したときにはデコボコの波面になっている。その凹凸の代表的な大きさ  $L$  に比べて十分小さい口径の望遠鏡や人の裸眼で星を観測すると、静止点光源に見えるはずの星が図 4a のようにふらつく。ふらつくだけでなく、明るさや色も変化する。これを日常語では星のまたたき (twinkle) といい、専門用語ではシンチレーション (scintillation) という。

色の変化は物理現象ではなく、人間の目の生理学的現象であるという説もある。

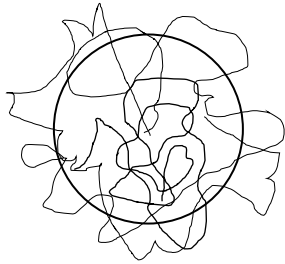


図 4 a

口径の小さい望遠鏡で見れば、  
星の像がふらついて見える。

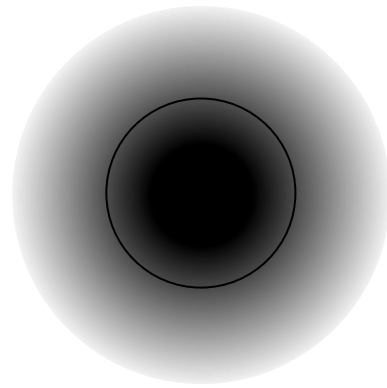


図 4 b

口径の大きい望遠鏡で見れば、  
星の像が円形にぼやけて見える。

(3)(c) 平面波が正弦波形状の境界面の波長  $L$  内を通過すると、屈折光のふれ角  $\delta$  が  $-\delta_{\max}$  から  $+\delta_{\max}$  の間に一様に分布するようになる。口径  $D$  が  $L$  より大きい場合には、このような分布に従うふれ角  $\delta$  の無数の波面が重なって望遠鏡内を伝わり、同時に観測者の目に到達する。それを観測者が見ると、星  $S$  は東西方向に伸びた線光源として、 $-\delta_{\max}$  と  $+\delta_{\max}$  の間に観測される。

(補足 2)

実際の大气は上述のように乱流状態にあるので、口径の大きな望遠鏡では、図 4b のように、星の像はぼやけた円に見える。この円の直径  $d$  が大きいほど像のぼやけ具合 (不鮮明度) が大きくなる。それを天文学者はシーイング (seeing) が悪いという。シーイングが悪いと天体観測にいろいろと支障を来たすので、望遠鏡はできるだけシーイングの良いところに設置しなければならない。すばる望遠鏡が設置されているハワイのマウナケア山頂では、波長や天文台のドームにもよるが、 $d$  は 0.6 秒角程度である。日本国内では、最も条件の良いところでも  $d \geq 1$  秒角である。

ハッブル宇宙望遠鏡のように大気圏外で観測すればシンチレーションは起こらないが、光の回折のために像はぼやける。口径  $D$  の開口部を平面波が通過するときの回折角  $\delta_D$  は  $1.2 \lambda / D$  で与えられる。 $\lambda$  は光の波長である。 $\lambda = 500 \text{ nm}$ ,  $D = 2.4 \text{ m}$  であれば、 $\delta_D = 2.5 \times 10^{-7} \text{ rad} = 5.1 \times 10^{-2}$  秒角となる。

地上にある大望遠鏡の薄い凹面鏡は自重によって歪んでしまう。歪みは望遠鏡の向きによって違ってくる。それを防ぐために、多数のアクチュエータ (actuator) によって凹面鏡の裏面に、場所ごとに異なる圧力を加え、歪みがない状態に戻す。

このような補正をしても、大気中の乱流のために望遠鏡に入射する波面はデコボコなので、鮮明な画像は得られない。そこで、各瞬間にこの凹凸状態を測定し、それを基にして、望遠鏡と観測装置の間に設置された変形可能な反射鏡の表面の傾きをアクチュエータによって場所ごとに変え、反射波の波面を平面に近づける。入射波面の凹凸状態は、明るい星、あるいは望遠鏡から強力なレーザ

一光を放射して成層圏～中間圏に作り出した人工光源を観測することによって測定する。このような観測技術を補償光学という。

その効果は絶大で、たとえば、補償光学によって得られた銀河系中心の画像は、個々の星を鮮明に捉えており、その動きを時間的に追跡することによって、銀河系中心に質量が太陽の約 400 万倍にもなる巨大なブラックホールが存在することを明らかにしたのである。

(余談)

1932 年、K. Jansky は指向性アンテナで空中電波を観測し、宇宙から電波がやってくることを発見した。同じ年に、J. Chadwick は、入試問題にも出てくる方法でベリリウム線を解析し、中性子を発見した。

戦後、宇宙電波の分野では次から次へと大発見が続き、天文学に大変革をもたらした。

1955 年、強い電波源を観測していた A. Hewish は、電波がまたたいているのを発見した。後になって、その原因は太陽風（太陽から吹き出す電離水素を主成分とするプラズマ）内の乱流であることがわかった。乱流のためにプラズマの密度が空間的にも時間的にも変化しており、その中で宇宙電波が通過すると、位相が乱れ、電波がまたたくのである。

地球大気と比べれば、太陽風の空間スケールが大きいので、宇宙電波の強度が 1 秒程度より短い時間で変化することはないだろうと考えられていたのであるが、Hewish は 0.1 秒くらいの時間変化も観測できるように、2048 個の双極子を並べた電波干渉計を組み立てた。これで宇宙電波を測定すれば、そのまたたきから太陽風に関するデータが得られ、さらに、またたきを利用すれば、コンパクトな電波源の天球面上でのおおよその大きさや形を知ることができるのである。

1967 年、掃天観測が始まってすぐに、大学院生の J. Bell が 1 秒程度の正確な周期で電波パルスを発する天体（パルサー）を発見した。電波のまたたきの研究からパルサーが飛び出してきたのである。これこそまさに「瓢箪から駒」である。Hewish らは、周期的なパルスの原因は白色矮星か中性子星の半径振動と考えたが、その後間もなくして、中性子星の高速回転に起因することがわかった。

1932 年中性子が発見されると、すぐに中性子の縮退圧によって重力を支える中性子星の存在が論じられるようになる。そして 1934 年には、W. Baade と F. Zwicky が超新星爆発によって中性子星が形成されること、したがって、かに星雲に中性子星が存在することを予言している。1939 年には、中性子星の質量限界についての理論的研究が Tolman – Oppenheimer – Volkoff によってなされている。その形成過程を考えれば、角運動量と磁束の保存則から、中性子星は高速で回転し、極度に圧縮された磁場から電磁波が放射されることを、1967 年に F. Pacini が予言している。

そして、これらはすべてパルサーの発見とその後の観測によって検証され、中性子星をめぐる一連の予想は見事に的中し、一応の結着を見たのである。

[他の演習問題へ](#)