問題 15 の解説（大学生向き） ～宇宙ヨットの相対論的運動方程式とその解～

相対論の基本がわかっていて，式 (42) と式 (46) の意味を理解できる人は，§2 から読まれるとよい。

§1　基本方程式

(A) 質点の運動

慣性系 S での時間を t，空間座標を (x, y, z)，質点の速度を，

$$\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z) \tag{1}$$

とする。このとき，ミンコフスキー空間の座標は，光速を c として，

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) \tag{2}$$

で与えられる。ミンコフスキー空間の計量テンソルは，

$$\eta^{ij} = \eta_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

とする。微小時間 $\mathrm{d}t$ の間に質点が $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z) = (v_x\,\mathrm{d}t, v_y\,\mathrm{d}t, v_z\,\mathrm{d}t)$ だけ変位するとき，その間の世界間隔の 2 乗 $(\mathrm{d}s)^2$ は，

$$(\mathrm{d}s)^2 = \eta_{ij}(\mathrm{d}x^i)(\mathrm{d}x^j) \tag{4}$$

$$= -(c\,\mathrm{d}t)^2 + (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2$$

$$= -c^2(\mathrm{d}t)^2 + v^2(\mathrm{d}t)^2 \tag{5}$$

と表される。ただし，$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ である。式 (4) ではアインシュタインの略記法が使われており，i と j それぞれについて 0 から 3 まで加え合わせる。以下，ラテン文字の添え字 $i, j, \cdots$ は $(0, 1, 2, 3)$ を表す。

質点が静止して見える慣性系 S′ での時間（固有時間）を τ とすれば，$(\mathrm{d}s)^2$ がローレンツ変換に対して不変であることから，

$$(\mathrm{d}s)^2 = -(c\,\mathrm{d}\tau)^2 \tag{6}$$

が成り立つ。式 (5) と式 (6) より，

$$\mathrm{d}\tau = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\,\mathrm{d}t \tag{7}$$

を得る。質点の 4 元速度 u^i は，

$$u^i = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau} \tag{8}$$

で定義される。具体的には，$\beta = v/c$ として，

$$
\left.
\begin{aligned}
&u^0 = \frac{\mathrm{d}\,x^0}{\mathrm{d}\,\tau} = \frac{\mathrm{d}\,(\,c\,t\,)}{\sqrt{1-\beta^2}\ \mathrm{d}t} = \frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \\
&u^1 = \frac{\mathrm{d}\,x^1}{\mathrm{d}\,\tau} = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\beta^2}\ \mathrm{d}t} = \frac{v_x}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \\
&u^2 = \frac{v_y}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad , \qquad u^3 = \frac{v_z}{\sqrt{1-\beta^2}}
\end{aligned}
\right\} \tag{9}
$$

となる。このとき,

$$
\eta_{ij}\, u^i\, u^j = -(\,u^0\,)^2 + (\,u^1\,)^2 + (\,u^2\,)^2 + (\,u^3\,)^2 = -\,c^2 \tag{10}
$$

が成り立つ。すなわち, 4 元速度の長さの 2 乗は定数となる。

静止質量 m_0 の質点の 4 元運動量 p^i は,

$$
p^i = m_0\, u^i \tag{11}
$$

で定義され, 式 (10) に対応して,

$$
-\,(\,p^0\,)^2 + (\,p^1\,)^2 + (\,p^2\,)^2 + (\,p^3\,)^2 = -\,(\,m_0\,c\,)^2 \tag{12}
$$

が成り立つ。4 元運動量の空間成分 $\big($ 第 1 , 2 , 3 成分$\big)$ p^1 , p^2 , p^3 から成る 3 元運動量 $\boldsymbol{p} = (\,p^1\,,\,p^2,\,p^3\,) = \big(\,p_x\,,\,p_y\,,\,p_z\,\big)$ が時間的に変化するとき,

$$
\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}\,t} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}} \tag{13}
$$

を満たす 3 元力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}} = \big(\,F_{\mathrm{N}x}\,, F_{\mathrm{N}y}\,, F_{\mathrm{N}z}\,\big)$ をニュートン型の力という。

4 元運動量の時間成分 $\big($ 第 0 成分$\big)$ $p^0 = m_0\,u^0 = m_0\,c\,/\sqrt{1-\beta^2}$ の物理的意味は, 次の計算からわかる。まず, 式 (12) の両辺を時間 t で微分すれば,

$$
-\,p^0\,\frac{\mathrm{d}\,p^0}{\mathrm{d}\,t} + p^1\,\frac{\mathrm{d}\,p^1}{\mathrm{d}\,t} + p^2\,\frac{\mathrm{d}\,p^2}{\mathrm{d}\,t} + p^3\,\frac{\mathrm{d}\,p^3}{\mathrm{d}\,t} = 0 \tag{14}
$$

を得る。式 (11) , (9) , (13) を用いて, 式 (14) を書き換えれば,

$$
-\,\frac{m_0\,c}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\frac{\mathrm{d}\,p^0}{\mathrm{d}\,t} + \frac{m_0\,v_x}{\sqrt{1-\beta^2}}\,F_{\mathrm{N}x} + \frac{m_0\,v_y}{\sqrt{1-\beta^2}}\,F_{\mathrm{N}y} + \frac{m_0\,v_z}{\sqrt{1-\beta^2}}\,F_{\mathrm{N}z} = 0
$$

となり, さらに, 両辺に $\sqrt{1-\beta^2}\ \mathrm{d}\,t\,/\,m_0$ を掛けて移項すれば,

$$
c\,\mathrm{d}\,p^0 = F_{\mathrm{N}x}\,\mathrm{d}x + F_{\mathrm{N}y}\,\mathrm{d}y + F_{\mathrm{N}z}\,\mathrm{d}z \tag{15}
$$

となる。式 (15) の右辺は微小時間 $\mathrm{d}t$ の間にニュートン型の力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$ が質点にする仕事であるから, 左辺はその間の質点のエネルギー E の変化量 $\mathrm{d}\,E$ と見なせる。すなわち, E は,

$$
E = c\,p^0 = \frac{m_0\,c^2}{\sqrt{1\,-\beta^2}} \tag{16}
$$

と表される。

3 元ベクトルの $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$ で表されている運動方程式 (13) は, ローレンツ変換に対して不変ではない。時間 t をスカラーの固有時間 τ に, 3 元運動量 $\boldsymbol{p}$ を 4 元運動量ベクトル p^i に, 3 元力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$ を 4 元力ベクトル F^i に書き換えたとき,

$$\frac{\mathrm{d}\,p^{\,i}}{\mathrm{d}\,\tau} = F^{\,i} \tag{17}$$

が成り立てば，この運動方程式はローレンツ変換に対して不変となる。この 4 元力 $F^{\,i}$ をミンコフスキー型の力と言い，ニュートン型の力 $\boldsymbol{F}_\mathrm{N}$ との間に次の関係式が成り立つ。

$$\left.\begin{aligned}
&F^1 = \frac{\mathrm{d}\,p^{\,1}}{\mathrm{d}\,\tau} = \frac{\mathrm{d}\,p_x}{\sqrt{1-\beta^2}\;\mathrm{d}t} = \frac{F_{\mathrm{N}x}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \\
&F^2 = \frac{F_{\mathrm{N}y}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad F^3 = \frac{F_{\mathrm{N}z}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \\
&c\,F^0 = c\,\frac{\mathrm{d}\,p^0}{\mathrm{d}\,\tau} = \frac{F_{\mathrm{N}x}\,\mathrm{d}x + F_{\mathrm{N}y}\,\mathrm{d}y + F_{\mathrm{N}z}\,\mathrm{d}z}{\sqrt{1-\beta^2}\;\mathrm{d}t} = \frac{Q_\mathrm{N}}{\sqrt{1-\beta^2}}
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

ここにおいて，$Q_\mathrm{N} = \boldsymbol{F}_\mathrm{N} \cdot \boldsymbol{v}$ はニュートン型の力による仕事率である。

（B） 完全流体の運動

粘性がなく，応力が等方的な圧力だけであるような流体を完全流体という。慣性系 S において，完全流体の微小部分のエネルギー・運動量テンソル $T^{\,i\,j}$ は，

$$T^{\,i\,j} = \left(\rho_0 + \frac{p}{c^2}\right) u^{\,i}\,u^{\,j} + p\,\eta^{\,i\,j} \tag{19}$$

と表される（文献 1）。ここにおいて，ρ_0 と $u^{\,i}$ は微小部分の静止質量密度と 4 元速度であり，p は微小部分が静止して見える共動慣性系 S′ での流体の圧力である。初期宇宙のような特殊な状況を除けば，p は $\rho_0\,c^2$ に比べて無視できるので，ここでは $p = 0$ とする。さらに，非圧縮性流体を想定し，ρ_0 を定数として，

$$T^{\,i\,j} = \rho_0\,u^{\,i}\,u^{\,j} \tag{20}$$

を仮定する。

実際の宇宙ヨットのような物体では，質量密度は一様ではないし，内部構造のために，応力テンソルは非対角成分を持つ。そのような物体が，真空中で放射圧を受けて光速度に近づくとき，その過程を追跡するのは，回転や振動の可能性もあり，かなりむずかしくなる。本稿では計算を簡単にするために，物体のモデルとして，変形しない平板状の容器に閉じ込められた一様密度 ρ_0 の完全流体を採用する。

慣性系 S における物体の質量密度を ρ とすれば，

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{21}$$

が成り立つ。なぜなら，S 系での微小体積 $\mathrm{d}\,V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ とそれに対応する S′ 系での微小体積 $\mathrm{d}\,V' = \mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}z'$ の間には，ローレンツ短縮のために，

$$\mathrm{d}\,V = \sqrt{1-\beta^2}\;\mathrm{d}\,V' \tag{22}$$

が成り立ち，この微小体積内の固有質量 $\mathrm{d}\,m_0$ は，

$$\mathrm{d}\,m_0 = \rho_0\,\mathrm{d}\,V' = \rho\,\mathrm{d}\,V \tag{23}$$

で与えられるからである。

一般的に，流体に対する連続方程式（広義の質量保存則）は，

$$\frac{\partial\,\rho}{\partial\,t} + \frac{\partial\,(\rho\,v_x)}{\partial\,x} + \frac{\partial\left(\rho\,v_y\right)}{\partial\,y} + \frac{\partial\,(\rho\,v_z)}{\partial\,z} = 0 \tag{24}$$

と表される。式 (2) , (9) , (21) を用いて式 (24) を書き換えれば，

$$\frac{\partial\,(\rho_0\,u^0)}{\partial\,x^0} + \frac{\partial\,(\rho_0\,u^1)}{\partial\,x^1} + \frac{\partial\,(\rho_0\,u^2)}{\partial\,x^2} + \frac{\partial\,(\rho_0\,u^3)}{\partial\,x^3} = 0 \tag{25}$$

となる。ここでは ρ_0 を定数としているので，式 (25) より

$$\frac{\partial\,u^j}{\partial\,x^j} = 0 \tag{26}$$

を得る。このとき流体の微小部分の運動方程式は，それにはたらくミンコフスキー型の外力密度を $f^{\,i}$ として，次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} f^{\,i} &= \frac{\mathrm{d}\left(\rho_0\,u^i\right)}{\mathrm{d}\,\tau} \\ &= \frac{\partial\left(\rho_0\,u^i\right)}{\partial\,x^j}\,\frac{\mathrm{d}\,x^j}{\mathrm{d}\,\tau} = \frac{\partial\left(\rho_0\,u^i\right)}{\partial\,x^j}\,u^j = \frac{\partial\left(\rho_0\,u^i\,u^j\right)}{\partial\,x^j} - \rho_0\,u^i\,\frac{\partial\,u^j}{\partial\,x^j} \\ &= \frac{\partial}{\partial\,x^j}\,T^{\,i\,j} \end{aligned} \tag{27}$$

（C） 電磁場内の荷電粒子にはたらく力

電磁場のエネルギー・運動量テンソル $T_{\mathrm{EM}}^{\,i\,j}$ は次のように表される。

$$T_{\mathrm{EM}}^{\,i\,j} = \begin{pmatrix} u & I_x/c & I_y/c & I_z/c \\ I_x/c & -t_{xx} & -t_{xy} & -t_{xz} \\ I_y/c & -t_{yx} & -t_{yy} & -t_{yz} \\ I_z/c & -t_{zx} & -t_{zy} & -t_{zz} \end{pmatrix} \tag{28}$$

ここにおいて，u は電磁場のエネルギー密度で，電場，磁場，真空の誘電率，真空の透磁率を，それぞれ $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, ε_0 , μ_0 として，

$$u = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0\,\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E} + \frac{1}{\mu_0}\,\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}\right) \tag{29}$$

と表される。光速 c と ε_0 , μ_0 の間には，

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}} \tag{30}$$

の関係がある。$\boldsymbol{I} = \left(I_x , I_y , I_z\right)$ は電磁場エネルギーの流束密度（$\boldsymbol{I}$ に垂直な面を通過する単位面積あたり単位時間あたりの電磁場のエネルギー）を表すポインティングベクトルで，

$$\boldsymbol{I} = \frac{1}{\mu_0}\,\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} \tag{31}$$

と表される (注 1) 。$\boldsymbol{I}$ と u の間には,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{I} = 0 \tag{32}$$

の関係がある。$t_{\alpha\beta}$ はマックスウェルの応力テンソルで,

$$t_{\alpha\beta} = \left(\varepsilon_0 E_\alpha E_\beta + \frac{1}{\mu_0} B_\alpha B_\beta \right) - u\, \delta_{\alpha\beta} \qquad (\,\delta_{\alpha\beta}\ \text{はクロネッカーの}\ \delta\ \text{記号}\,) \tag{33}$$

と表される。ギリシャ文字の添え字 $\alpha, \beta, \cdots$ は (x, y, z) または $(1, 2, 3)$ を表す。

荷電粒子が電磁場から受けるミンコフスキー型の電磁気力密度 f_{EM}^{i} は次式で与えられる。

$$-f_{\mathrm{EM}}^{i} = -f_{k}^{i}\, j^{k} = \frac{\partial T_{\mathrm{EM}}^{ij}}{\partial x^{j}} \tag{34}$$

ここにおいて, j^{k} は 4 元電流密度で, 電荷密度を ρ_{e} , 電流密度を $j = (j_x, j_y, j_z)$ として,

$$(j^0, j^1, j^2, j^3) = (c\, \rho_{\mathrm{e}}, j_x, j_y, j_z) \tag{35}$$

で定義される。f_{k}^{i} は電磁場の混合テンソルで,

$$f_{k}^{i} = \begin{pmatrix} 0 & E_x / c & E_y / c & E_z / c \\ E_x / c & 0 & B_z & -B_y \\ E_y / c & -B_z & 0 & B_x \\ E_z / c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{36}$$

で定義される (文献 2) 。

(D) 広義のエネルギー保存則と広義の運動量保存則

真空中に, (B) で述べたようなモデル化された物体があり, そのエネルギー・運動量テンソルが式 (20) で与えられるとする。この物体に電磁波が入射すると, 物体内の電子に電磁気力がはたらき, その合力が放射圧となって, 物体に加速度運動を起こさせる。そのとき, ジュール熱の発生がなく,

$$f_{\mathrm{EM}}^{i} = f^{i} \tag{37}$$

が成り立つと仮定すると, 式 (27) と式 (34) より,

$$0 = \frac{\partial}{\partial x^{j}} \left(T^{ij} + T_{\mathrm{EM}}^{ij} \right) \tag{38}$$

を得る。慣性系 S において, 物体を取り囲む領域 V で, 式 (38) の両辺を積分すれば, 広義のエネルギー保存則と広義の運動量保存則を得る。

まず, $i = 0$ の場合, 式 (38) は,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x^{j}} \left(T^{0j} + T_{\mathrm{EM}}^{0j} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial (c\,t)} (T^{00} + T_{\mathrm{EM}}^{00}) + \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} (T^{0\alpha} + T_{\mathrm{EM}}^{0\alpha}) \\ &= \frac{\partial}{\partial (c\,t)} \left(\rho_0 \frac{c^2}{1 - \beta^2} + u \right) + \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \left(\rho_0 \frac{c\, v_\alpha}{1 - \beta^2} + \frac{I_\alpha}{c} \right) \end{aligned} \tag{39}$$

となる。この両辺に c を掛け，領域 V で積分すれば，

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\int_{\mathrm{V}} \rho_0 \,\mathrm{d}\,V\ \frac{c^2}{1-\beta^2} + \int_{\mathrm{V}} u \,\mathrm{d}\,V \right) + \int_{\mathrm{V}} \mathrm{div}\left(\frac{\rho_0\, c^2}{1-\beta^2}\, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{I} \right) \mathrm{d}\,V \tag{40}$$

となる。第 1 項と第 3 項の ρ_0 は共動慣性系 S′ で定義される質量密度であるから，式 (21) を用いて，ρ_0 を $\rho\sqrt{1-\beta^2}$ に置き換え，第 3 項と第 4 項にガウスの定理を用いれば，

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{m_0\, c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + U \right) + \int_{\mathrm{S}} \left(\frac{\rho\, c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{I} \right) \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}\,S \tag{41}$$

を得る。ここにおいて，m_0 は物体の静止質量，U は V 内の電磁場のエネルギー，$\boldsymbol{n}$ は V の表面 S の外向き単位法線ベクトルである。S 上では $\rho = 0$ であるから，第 3 項の表面積分は 0 となる。式 (16) を用いれば，最終的に，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\,E + U\,) = -\int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}\,S \tag{42}$$

を得る。これは，V 内にある物体と電磁場の全エネルギーの時間変化率が，外部から V 内に流入する単位時間あたりの電磁場のエネルギーに等しいことを表しており，広義のエネルギー保存則を表す。

次に，$i = \alpha$ の場合，式 (38) は，

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial\, x^{\,j}} \left(T^{\,\alpha\, j} + T^{\,\alpha\, j}_{\mathrm{EM}} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial\,(\,c\,t\,)} \left(\rho_0 \frac{c\, v_\alpha}{1-\beta^2} + \frac{I_\alpha}{c} \right) + \frac{\partial}{\partial\, x^{\,\delta}} \left(\rho_0 \frac{v_\alpha\, v_\delta}{1-\beta^2} - t_{\alpha\delta} \right) \end{aligned} \tag{43}$$

となる。電磁場の運動量密度 $\boldsymbol{g}$ は，

$$\boldsymbol{g} = \frac{\boldsymbol{I}}{c^2} \tag{44}$$

で与えられることに注意して，式 (43) の両辺を領域 V で積分すれば，$i = 0$ の場合と同様に，第 3 項が 0 となり，

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{m_0\, v_\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}} + \int_{\mathrm{V}} g_\alpha \,\mathrm{d}\,V \right) - \int_{\mathrm{S}} t_{\,\alpha\delta}\, n^{\delta} \,\mathrm{d}\,S \tag{45}$$

を得る。n^{δ} は単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の δ 方向の成分である。物体の運動量を $\boldsymbol{P}$，領域 V 内の電磁場の運動量を $\boldsymbol{P}_{\mathrm{EM}} = \int_{\mathrm{V}} \boldsymbol{g} \,\mathrm{d}\,V$ とすれば，式 (45) は，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\,\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}_{\mathrm{EM}}\,)_\alpha = \int_{\mathrm{S}} t_{\,\alpha\delta}\, n^{\delta} \,\mathrm{d}\,S \tag{46}$$

と書き換えられる。この式は，領域 V 内の全運動量の時間変化率が，表面 S を介して V 内の電磁場におよぼす電磁気力の単位時間あたりの力積に等しいこと，あるいは，S を通って V 内へ流れ込む単位時間あたりの電磁場の運動量に等しいことを表しており，広義の運動量保存則を表す。

当然のことながら，相対論的でない状況，すなわち，$v \ll c$ の場合でも式 (42) と式 (46) は成り立っているが，その場合の相対論に基づかない証明が，

ジャックソン ： 電磁気学(上) §6.7 吉岡書店

に与えられている。

§2 宇宙ヨットの相対論的運動方程式

電磁波は運動量を持っているので，無重力の真空中で宇宙ヨットの帆にレーザー光を照射すると，帆に圧力がはたらき，宇宙ヨットは加速運動する。帆にレーザー光を照射しつづけると，やがて宇宙ヨットの速さは光速に近づく。その過程は相対論を用いて論じなければならない。

(A) 入射レーザー光と反射レーザー光

光源から宇宙ヨットに向かって放射されるレーザー光は，計算を簡単にするために，直線偏光の平面波とする。図 1a に示すように，入射レーザー光の伝播方向を x 方向とし，それに垂直な方向に振動する電場と磁場を，

$$E_y(x,t) = E_0 \sin(\omega t - kx + \theta) \tag{47}$$

$$B_z(x,t) = B_0 \sin(\omega t - kx + \theta) \tag{48}$$

と表す。ω は角振動数，k は(角)波数で，$c = \omega / k$ の関係がある。このとき，ポインティングベクトル $\boldsymbol{I}$ の成分は，式 (31) より，

$$I_x(x,t) = \frac{1}{\mu_0} E_y B_z = \frac{1}{\mu_0} E_0 B_0 \sin^2(\omega t - kx + \theta) \geqq 0 \tag{49}$$

$$I_y = I_z = 0$$

となる。

ある位置 x で，時間平均をとれば，電磁場の平均エネルギー密度 $\overline{u}$ と平均運動量密度 $\overline{\boldsymbol{g}}$ は，

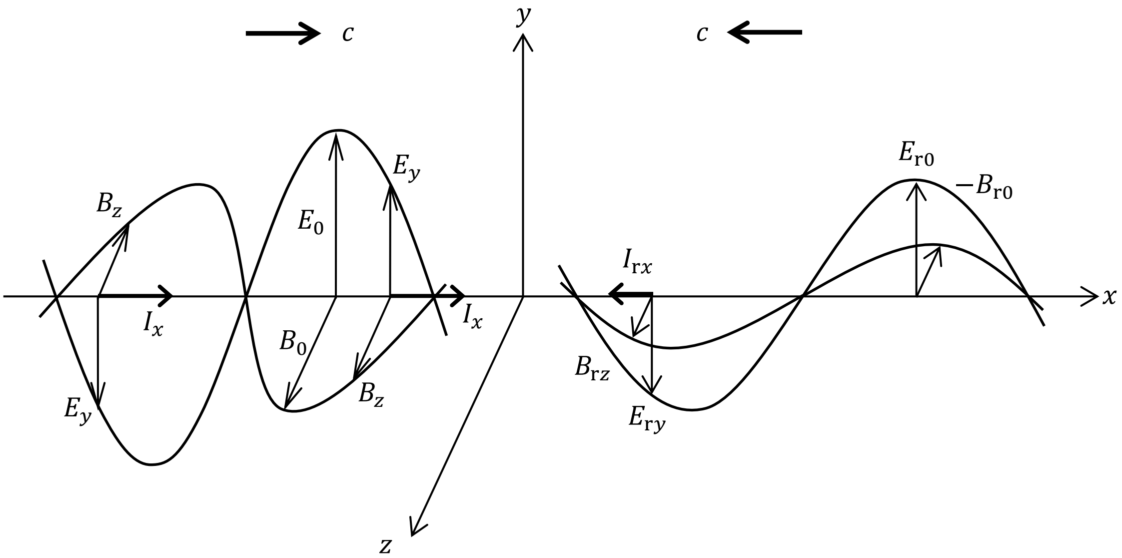


図 1a 入射波　　　　図 1b 反射波

$$\overline{u}\,(x) = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0\,\overline{E_y^{\,2}} + \frac{1}{2\,\mu_0}\,\overline{B_z^{\,2}} = \frac{1}{4}\,\varepsilon_0\,E_0^{\,2} + \frac{1}{4\,\mu_0}\,B_0^{\,2} \tag{50}$$

$$\overline{g}_x\,(x) = \frac{1}{c^2}\;\overline{I}_x = \frac{1}{2\,\mu_0\,c^2}\,E_0\,B_0 \tag{51}$$

$$\overline{g}_y\,(x) = \overline{g}_z\,(x) = 0$$

となる。$\overline{}$ は時間平均を表す。一方，電磁波では B_0 と E_0 の間に，

$$B_0 = \sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}\;E_0 = \frac{1}{c}\,E_0 \tag{52}$$

が成り立つので，式 (50) と式 (51) は次のように書き換えられる。

$$\overline{u}(x) = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0\,E_0^{\,2} = 一定 \tag{53}$$

$$\overline{g}_x(x) = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0\,E_0\,\frac{E_0}{c} = \frac{1}{c}\,\overline{u}(x) = 一定 \tag{54}$$

次に，$E_z = E_x = 0$ と $B_y = B_x = 0$ に注意して，ポインティングベクトルの x 成分 I_x とマックスウェルの応力テンソル $t_{\alpha\,\delta}$ の時間平均を求めれば，

$$\overline{I}_x = \frac{1}{2\,\mu_0}\,E_0\,B_0 = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0\,c^2\,E_0\,\frac{E_0}{c} = c\,\overline{u} \tag{55}$$

$$\begin{aligned}\overline{t}_{\alpha\,\delta} &= \frac{1}{4}\,\varepsilon_0 \begin{pmatrix} -E_0^{\,2} & 0 & 0 \\ 0 & +E_0^{\,2} & 0 \\ 0 & 0 & -E_0^{\,2} \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\,\varepsilon_0\,c^2 \begin{pmatrix} -B_0^{\,2} & 0 & 0 \\ 0 & -B_0^{\,2} & 0 \\ 0 & 0 & +B_0^{\,2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\,\varepsilon_0 \begin{pmatrix} -E_0^{\,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\overline{u} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{56}$$

となる。$\overline{I}_x$ は x 軸に垂直な面を単位面積あたり単位時間あたりに通過する電磁波のエネルギーで，問題 15 ではこれを I で表した。

x 軸の正の向きに速さ v で運動する薄膜の帆にレーザー光が入射し，全反射したあと，x 軸の負の向きに伝わる直線偏光の平面波になったとする。反射波に関する物理量は添え字 r で表すことにする。この反射波の電場と磁場を，図 1 b のように，

$$E_{\mathrm{r}y}(x\,,t) = E_{\mathrm{r}0}\sin\,(\,\omega_{\mathrm{r}}\,t + k_{\mathrm{r}}\,x + \theta_{\mathrm{r}}\,) \tag{57}$$

$$B_{\mathrm{r}z}(x\,,t) = -B_{\mathrm{r}0}\sin\,(\,\omega_{\mathrm{r}}\,t + k_{\mathrm{r}}\,x + \theta_{\mathrm{r}}\,) \tag{58}$$

とすると，入射波の場合と同様にして，

$$c = \omega_{\mathrm{r}}\,/\,k_{\mathrm{r}} \tag{59}$$

$$\overline{u}_{\mathrm{r}} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0\,E_{\mathrm{r}0}^{2} \tag{60}$$

$$\overline{g}_{\mathrm{r}x} = -\frac{1}{c}\overline{u}_{\mathrm{r}} \tag{61}$$

$$\overline{I}_{\mathrm{r}x} = -c\,\overline{u}_{\mathrm{r}} \tag{62}$$

$$\overline{t}_{\mathrm{r}xx} = -\overline{u}_{\mathrm{r}} \tag{63}$$

を得る。

(B) 宇宙ヨットの相対論的運動方程式

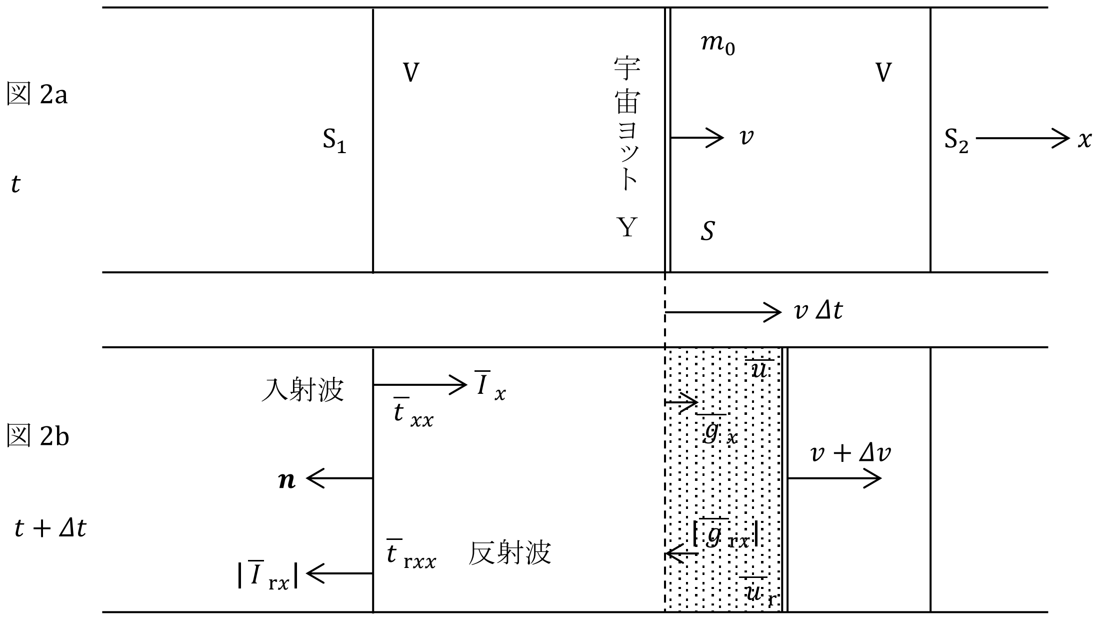
図 2a は，レーザー光源に固定した慣性系 (L 系) から見たとき，時刻 t において宇宙ヨット Y が速さ v で x 軸の正の向きに運動する様子を表している。ヨット Y の静止質量を m_0，帆の面積を S とし，帆は常に x 軸に垂直であるとする。図 2b は，それから微小時間 $\varDelta t$ 経ったときの様子である。このとき，ヨット Y とその近傍を取り囲む領域を V とする。この領域 V は L 系に対して静止している。

ヨットの帆に垂直に入射したレーザー光は全反射すると仮定する。この場合，ヨット Y と領域 V の右側面 S_2 の間にレーザー光は存在しない (注 2)。一般的に，左側面 S_1 とヨット Y の左側表面における反射レーザー光の振幅は異なっているが，その差が無視できるほど S_1 は Y に近いとする。ここで，領域 V 内の全エネルギーと全運動量の微小時間 $\varDelta t$ の間の変化量が満たすべき式を式 (42) と式 (46) から導く。

ヨット Y のエネルギー E と運動量の x 成分 P_x は，$\beta = v / c$ として，

$$E = \frac{m_0\,c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad P_x = \frac{m_0\,v}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m_0\,c\,\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{64}$$

と表され，微小時間 $\varDelta t$ の間に，



$$\varDelta E = \frac{\mathrm{d}\,E}{\mathrm{d}\,t}\,\varDelta t = m_0\,c^2\,\beta\,(\,1-\beta^2\,)^{-3/2}\,\dot{\beta}\,\varDelta t \tag{65}$$

$$\varDelta P_x = \frac{\mathrm{d}\,P_x}{\mathrm{d}\,t}\,\varDelta t = m_0\,c\,(\,1-\beta^2\,)^{-3/2}\,\dot{\beta}\,\varDelta t \tag{66}$$

だけ変化する。$\dot{\beta}$ は β の時間 t による微分である。

領域 V 内にある電磁場のエネルギー U と運動量の x 成分 $P_{\mathrm{EM}x}$ は，微小時間 $\varDelta t$ の間に，図 2b の薄い影を施した領域にある量だけ増加する。それらは，

$$\varDelta U = (\,\overline{u} + \overline{u}_{\mathrm{r}}\,)\,S\,v\,\varDelta t = (\,\overline{u} + \overline{u}_{\mathrm{r}}\,)\,S\,c\,\beta\,\varDelta t \tag{67}$$

$$\varDelta P_{\mathrm{EM}x} = (\,\overline{g}_{\,x} + \overline{g}_{\,\mathrm{r}\,x}\,)\,S\,v\,\varDelta t = \left(\frac{\overline{u}}{c} - \frac{\overline{u}_{\mathrm{r}}}{c}\right)\,S\,c\,\beta\,\varDelta t \tag{68}$$

と表される。ここで，L 系から見たときに，帆全体に向かうレーザー光の単位時間あたりのエネルギーを Q，帆全体で反射されて光源に戻るレーザー光の単位時間あたりのエネルギーを Q_{r} とすれば，

$$Q = \overline{I}_{\,x}\,S\ = c\,\overline{u}\,S\,, \qquad Q_{\mathrm{r}} = |\,\overline{I}_{\,\mathrm{r}x}\,|\,S\ = c\,\overline{u}_{\mathrm{r}}\,S \tag{69}$$

であるから，式 (67) と式 (68) は次のように書き換えられる。

$$\varDelta U = (\,Q + Q_{\mathrm{r}}\,)\,\beta\,\varDelta t \tag{70}$$

$$\varDelta P_{\mathrm{EM}x} = \frac{1}{c}(\,Q - Q_{\mathrm{r}}\,)\,\beta\,\varDelta t \tag{71}$$

次に，微小時間 $\varDelta t$ の間に，側面 S_1 を通って領域 V に流入する電磁場のエネルギーは，

$$\begin{aligned}\left(-\int_{\mathrm{S}_1}\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\,S\right)\varDelta t &= -\,[\,(\,\overline{I}_{\,x} + \overline{I}_{\,\mathrm{r}x}\,)\,n_x\,S\,]_{\,\mathrm{S}_1}\,\varDelta t \\ &= c\,(\,\overline{u} - \overline{u}_{\mathrm{r}}\,)\,S\,\varDelta t = (\,Q - Q_{\mathrm{r}}\,)\,\varDelta t\end{aligned} \tag{72}$$

となる。$\boldsymbol{n}$ は表面 S の外向き単位法線ベクトルであるから，側面 S_1では $n_x = -1$ となる。また，微小時間 $\varDelta t$ の間に側面 S_1 を通って領域 V に流入する電磁場の運動量の x 成分は，式 (46) の右辺の α を x として，

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathrm{S}_1} t_{x\delta}\,n^{\delta}\,\mathrm{d}\,S\right)\varDelta t &= [\,(\,\overline{t}_{\,xx} + \overline{t}_{\,\mathrm{r}xx}\,)\,n_x\,S\,]_{\,\mathrm{S}_1}\,\varDelta t \\ &= (-\,\overline{u} - \overline{u}_{\mathrm{r}}\,)(-1)\,S\,\varDelta t = \frac{1}{c}\,(\,Q + Q_{\mathrm{r}}\,)\,\varDelta t\end{aligned} \tag{73}$$

となる。式 (73) の右辺は次のように考えた方がわかりやすい。第 1 項は入射波の正の向きの運動量が領域 V に流入し，第 2 項は反射波の負の向きの運動量が領域 V から流出することを表すので，領域 V 内の正の向きの運動量が増えるのである。

ここで，式 (65) , (70) , (72) を式 (42) に，式 (66) , (71) , (73) を式 (46) に代入し，両辺を $\varDelta t$ で割れば，

$$m_0\,c^2\,\beta\,(\,1-\beta^2\,)^{-3/2}\,\dot{\beta}+\left(\,Q+Q_{\mathrm{r}}\,\right)\beta=Q-Q_{\mathrm{r}} \tag{74}$$

$$m_0\,c\,(\,1-\beta^2\,)^{-3/2}\,\dot{\beta}+\frac{1}{c}\left(\,Q-Q_{\mathrm{r}}\,\right)\beta=\frac{1}{c}\left(\,Q+Q_{\mathrm{r}}\,\right) \tag{75}$$

となる。これら 2 式を Q_{r} と $\dot{\beta}$ について解けば，

$$Q_{\mathrm{r}}=\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^2 Q \tag{76}$$

$$\dot{\beta}=\frac{2\,Q}{m_0\,c^2}(\,1-\beta\,)^2\sqrt{1-\beta^2} \tag{77}$$

を得る。式 (77) が宇宙ヨットの相対論的運動方程式である。式 (76) と式 (77) は，問題 15 の (**大学レベルの追加説明**) で別の方法を用いて導いた式と一致している。前提条件が同じであるから，当然の結果である。

同様の計算が，

石原　藤夫 ：ブルーバックス 「銀河旅行と特殊相対論」 第 3 章 , 講談社

に載っているが，本稿の式 (74) と式 (75) の左辺第 2 項を見落としている。これらの項は，光源と帆の間の空間にため込まれる電磁場のエネルギーと運動量を表している。ヨットの速さが光速に近づくにつれて，この空間の体積が加速度的に増加する。そして光源から放射されたエネルギーと運動量の大部分がこの空間を埋めつくすのに使われ，ヨットの帆に入射するエネルギーと運動量は 0 に近づくのである (注 3) 。

(C)　光源からの出力が一定のときの解

問題 15 は高校生用の問題なので，帆にはたらく力が一定となるように，レーザービームは広がらず，その断面でのエネルギー流束密度は一様であるとした。しかし，実際のレーザービームは，回折のために広がり，光源から十分遠く離れたところでは円錐形になる。また，エネルギー流束密度は一様ではなく，対称軸から周辺に向かって減少する。その関数形がわかっておれば，ヨットの位置 x において，入射レーザー光のパワー Q を計算することができる。それと運動方程式 (77) を組み合わせ，初期条件を与えて解けば，任意の時刻における位置と速度がわかる。

ここでは，問題 15 で得た結果が，相対論的効果によって，どのような修正を受けるのかを知るために，Q が一定の場合について運動方程式を解く。

まず，時間の無次元変数 $\overline{t}$ を，

$$\overline{t}=\frac{2\,Q}{m_0\,c^2}\,t \tag{78}$$

で定義して，運動方程式 (77) を書き換えれば

$$\frac{\mathrm{d}\,\beta}{\mathrm{d}\,\overline{t}}=(\,1-\beta\,)^2\sqrt{1-\beta^2} \tag{79}$$

となる。初速度を 0 としてこれを解けば，次式を得る。

$$\overline{t}=\int_0^{\beta}\frac{\mathrm{d}\,\beta}{(\,1-\beta\,)^2\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{(\,2-\beta\,)(\,1+\beta\,)}{3\,(\,1-\beta\,)\sqrt{1-\beta^2}}-\frac{2}{3} \tag{80}$$

次に，初期位置を 0 として，位置 $x\,(\,t\,)$ を求める。

$$v = \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} \tag{81}$$

を，$v = c\,\beta$ と式 (78) と次式で定義される位置の無次元変数 ：

$$\overline{x} = \frac{2\,Q}{m_0\,c^3}\,x \tag{82}$$

を用いて書き換えれば，

$$\beta = \frac{\mathrm{d}\,\overline{x}}{\mathrm{d}\,\overline{t}} \tag{83}$$

となる。これを $\overline{t}$ で積分し，式 (79) を用いれば，次式を得る。

$$\overline{x} = \int_0^{\overline{t}} \beta\,\mathrm{d}\,\overline{t} = \int_0^{\beta} \beta\,\frac{\mathrm{d}\,\beta}{(\,1-\beta\,)^2\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{3} - \frac{(\,1-2\beta\,)\sqrt{1-\beta^2}}{3\,(\,1-\beta\,)^2} \tag{84}$$

式 (80) と式 (84) から，$\beta\,(\,\overline{t}\,)$ と $\overline{x}\,(\,\overline{t}\,)$ を数値計算で求めることができる。$\beta\,(\,\overline{t}\,)$ のグラフが図 3 に与えられている。

同じ図にある破線は，問題 15 で求めたニュートン力学の解である。この場合，ヨットの加速度 a は，

$$a = \frac{2\,Q}{m_0\,c} \tag{85}$$

であるから，

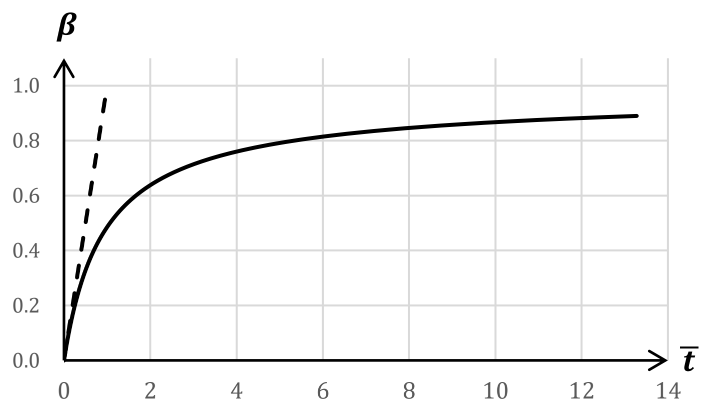
$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{1}{c}\,a\,t = \frac{2\,Q}{m_0\,c^2}\,\frac{m_0\,c^2}{2\,Q}\,\overline{t} = \overline{t} \tag{86}$$

$$\overline{x} = \int_0^{\overline{t}} \beta\,\mathrm{d}\,\overline{t} = \frac{1}{2}\,\overline{t}^{\,2} \tag{87}$$

となる。

図 3 が示すように，宇宙ヨットの速度は時間の経過とともに徐々に光速 c に近づく。しかし，この結果は Q が一定の仮定のもとに得られたものであることを忘れてはならない。実際の宇宙ヨットとレーザー光源でどこまで加速できるのか，についての技術的研究は現在進行中である。

図 3



(文献 1)

この式の導出は相対論の中級以上の教科書に載っている。たとえば，

ランダウ・リフシッツ ：「場の古典論」 広重・恒藤訳 東京図書出版 p.102

平川 浩正 ：「相対論」 共立出版 p.60〜p.61

(注 1)

ポインティングベクトルは $\boldsymbol{S}$ で表されることが多いのだが，表面積を表す S と紛らわしいので，$\boldsymbol{I}$ を用いた。I は輻射 (放射) 輸達論で放射強度 [単位面積あたり単位時間あたり単位立体角あたり単位振動数 (波長) あたりの放射エネルギー] を表すのに使われるのだが，ここでは放射強度は出てこないので，$\boldsymbol{S}$ の代わりに $\boldsymbol{I}$ を用いた。

(文献 2)

式 (34) の証明は多くの相対論の教科書に載っているが，説明が丁寧なものとして，

佐藤 勝彦 ： 岩波基礎物理学シリーズ 9 「相対性理論」 岩波書店

を挙げておく。(ただし，54 頁の演習問題もお忘れなく。)

(注 2)

ヨットの速度が v になったとき，共動慣性系 Y から見ると，入射光の反射率 R および吸収率 A は帆の材質と構造および入射光の振動数と振幅 (一般的には非線形現象なので) に依存する。ドップラー効果のために振動数は時間的に減少するし，光源から遠ざかると振幅も減少する。このような状況で，R とA を一定に保つのは困難であるから，実際にヨットの飛行シミュレーションを行なうときには，もっともらしい仮定のもとに，R とA の変化を考慮しなければならない。

(注 3)

加速のエネルギー効率 e

レーザー光源から放射されたエネルギーのうち，宇宙ヨットのエネルギーに変換される割合 e を求める。レーザー光源から見て，宇宙ヨットの速さが $v = \beta\, c$ になったとき，図 2a の領域 V に，微小時間 Δt の間に入ってくるエネルギーは $Q\Delta t$ である。そのうち，同じ時間内に出ていくエネルギーは $Q_{\mathrm{r}}\Delta t$ で，それらの差 $(Q - Q_{\mathrm{r}})\Delta t$ の一部が領域 V 内の電磁場のエネルギー ΔU となり，残りが宇宙ヨットのエネルギー ΔE となる。よって，

$$e = \frac{\Delta E}{Q\Delta t} = \frac{(Q - Q_{\mathrm{r}})\Delta t - \Delta U}{Q\Delta t}$$

となり，これに式 (70) と式 (76) を代入すれば，

$$e = \frac{2\beta\,(1-\beta)}{1+\beta}$$

を得る。この効率は，加速の始め ($\beta = 0$) と終り ($\beta \to 1$) で 0 となり，$\beta = \sqrt{2} - 1$ のときに極大値 $2(\sqrt{2} - 1)^2 = 0.343$ をとる。

参考論文 ： 斉藤全弘 「 宇宙ヨットの加速とエネルギー変換効率 (1) 」