

問題 15 宇宙ヨット

次の文中の $\boxed{(1)}$ ~ $\boxed{(13)}$ に () 内の変数で表した式を, $\boxed{(14)}$ ~ $\boxed{(16)}$ に有効数字 2 桁の数値を書き入れよ。

光を反射する薄膜の帆を張った飛行物体が無重力の真空中に静止している。この帆に光を照射すると圧力がはたらき、飛行物体は加速運動を始める。このような飛行物体を宇宙ヨットと呼ぶことにする。以下においては、光速を c 、プランク定数を h 、万有引力定数を G 、太陽の質量を M_{\odot} とする。

I. 静止している薄膜の帆に振動数 ν の光が垂直に入射し、吸収や透過を伴うことなく、すべて反射される場合を考える。この光の光子が 1 個反射するとき、光子が帆におよぼす力積は $\boxed{(1)}$ (c, h, ν) である。帆に入射する単位面積あたり単位時間あたりの光子数が n であれば、この光が帆におよぼす圧力 p は $\boxed{(2)}$ (c, h, ν, n) となる。あるいは、単位面積あたり単位時間あたりに入射する光のエネルギーを I とすれば、

$$p = \boxed{(3)} (c, I)$$

と表すことができる。 p を放射圧, I を入射光のエネルギー流束密度という。

もし仮に、この入射光が、反射や透過を伴うことなく、すべて帆に吸収されれば、この光が帆におよぼす放射圧は $\boxed{(4)}$ (c, I) となる。

II. 面積 S の薄膜の帆を張った質量 m の宇宙ヨットが宇宙空間にある。帆に太陽光が入射するときには、常に帆の面が太陽光に対して垂直になるように制御されており、入射した太陽光はすべて反射される。太陽以外の天体が放射する光は無視することができ、またそれらの天体が宇宙ヨットにおよぼす万有引力も無視できるものとする。

最初、帆をたたんだ状態で、宇宙ヨットは太陽を中心とする半径 r_p の円軌道上を運動している。このとき宇宙ヨットの速さは $\boxed{(5)}$ (G, M_{\odot}, r_p) である。

太陽がその表面全体から単位時間あたりに宇宙空間へ放射する光のエネルギーを L_{\odot} とすれば、太陽を中心とする半径 r_p の球面上で、太陽光のエネルギー流束密度は $\boxed{(6)}$ (L_{\odot}, r_p) となる。よって、たたんでいた帆を広げれば、宇宙ヨットは太陽光から大きさ $\boxed{(7)}$ (c, L_{\odot}, r_p, S) の力を受けるようになる。その結果、宇宙ヨットは円軌道からずれ始める。そして太陽からの距離が r になると、宇宙ヨットにはたらく太陽光による力の大きさ f と太陽から受ける万有引力の大きさ F の比 z は、

$$z = \frac{f}{F} = \boxed{(8)} (c, G, M_{\odot}, L_{\odot}, m, S)$$

となり、 r に依存しない。

帆を広げたあと宇宙ヨットが描く軌道は、 z の値によって異なる。

$z < 1$ の場合、放射圧による力は万有引力を弱めるはたらきをし、放射圧がない状態で、万有引力が因子 $(1 - z)$ だけ小さくなるのと同じ効果をもたらす。特に、 $z < \frac{1}{2}$ の場合には、宇宙ヨットは帆を広げる位置を近日点とする楕円軌道を描くようになる。その楕円軌道の遠日点距離は (9) (r_p, z) となる。

$z > 1$ の場合には、二つの力の合力が太陽から離れる向きにはたらき、その大きさは r^2 に反比例する。そのため、宇宙ヨットは双曲線軌道を描いて無限遠へ飛び去る。そして無限遠での速さは (10) $(c, G, M_\odot, L_\odot, m, S, r_p)$ となる。

III. II で扱った宇宙ヨットの帆に地上から強烈なレーザー光を照射して、宇宙ヨットを加速し、太陽以外の恒星に送り込むことを考える。このレーザー光による放射圧は非常に大きいので、太陽が宇宙ヨットにおよぼす万有引力と放射圧による力は無視できる。最初、図 1 のように、宇宙ヨットは太陽からの距離 r が r_0 のところに静止しており、時刻 $t = 0$ のときに平面波のレーザー光が帆に垂直に入射し始めるとする。入射したレーザー光はすべて帆で反射される。このレーザー光は理想的な指向性を持っているので、ビーム幅は広がらず、その断面でのエネルギー流束密度 I は光源からの距離に依らず、時間的にも一定であるとする。

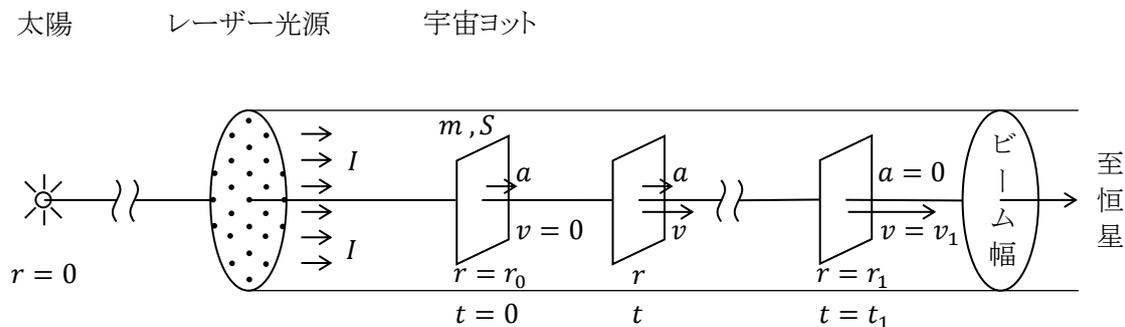


図 1

このレーザー光が宇宙ヨットにおよぼす力は一定となるので、宇宙ヨットは等加速度運動をする。その加速度の大きさ a は $\boxed{(11)}$ (c, m, S, I) である。ただし、ドップラー効果と相対論的效果は無視できるものとする。この場合、太陽からの距離が r_0 から r_1 になるまでの時間を t_1 , $r = r_1$ で宇宙ヨットの速さを v_1 とすれば、次の関係式が成り立つ。

$$t_1 = \boxed{(12)} (r_0, r_1, v_1)$$

$$a = \boxed{(13)} (r_0, r_1, v_1)$$

具体例として、

$$m = 5.0 \times 10^{-3} \text{ kg}, \quad S = 16 \text{ m}^2$$

$$r_0 = 1 \text{ AU} = 1.5 \times 10^{11} \text{ m}, \quad r_1 = 1.3 \text{ AU}$$

の場合を考える。1 AU は太陽と地球の間の距離で、AU を天文単位という。1.3 AU は火星の軌道半径より少し小さい距離である。光速 c は、

$$c = 3.0 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

である。このような状況で、 $v_1 = 0.2 c = 6.0 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}$ となるように加速するには、

$$t_1 = \boxed{(14)} \text{ s}$$

でなければならず、そのとき、

$$a = \boxed{(15)} \text{ m s}^{-2}$$

となる。したがって、光源から放射されるレーザー光のエネルギー流束密度は、

$$I = \boxed{(16)} \text{ W m}^{-2}$$

でなければならない。

時刻 t_1 で加速を止めれば、そのあと宇宙ヨットは光速 c の 20% の速さで恒星に向かうことになる。もしこのような宇宙ヨットが実現すれば、太陽に最も近い恒星なら数十年の間に、宇宙ヨットの発射・恒星近傍通過・観測データの送信と受信を見届けることができる。このようなことが技術的に可能かどうか、現在研究が進められている。

問題 15 解答と解説

宇宙ヨット (solar sail , light sail) の飛行が京都大学の 2002 年度入試問題に取り上げられている。実際に宇宙ヨットの飛行を太陽光の放射圧によって操作する実験は、2007 年に JAXA が打ち上げた IKAROS で成功している。これに刺激されたのか、太陽に最も近い恒星 α Cen. へ宇宙ヨットを送り込む計画 (Breakthrough Starshot) が真剣に議論されている。

I. (1) 光子の運動量は、帆へ入射する向きを正として、反射前は $+h\nu/c$ で、反射後は $-h\nu/c$ である。よって、反射による運動量変化は、

$$\left(-\frac{h\nu}{c}\right) - \left(+\frac{h\nu}{c}\right) = -\frac{2h\nu}{c}$$

となる。これに等しい力積を帆が光子におよぼすので、作用・反作用の法則より、光子は帆に

$$\boxed{\frac{2h\nu}{c}}$$
 の力積をおよぼす。

(2) 帆には時間 Δt の間に、単位面積あたり $n \Delta t$ 個の光子が入射するので、その間に光が帆におよぼす単位面積あたりの力積は $\frac{2h\nu}{c} n \Delta t$ で、これが $p \Delta t$ に等しいことから次式を得る。

$$p = \boxed{\frac{2h\nu}{c} n} \quad \text{①}$$

(3) 光子のエネルギーは $h\nu$ であるから、帆に単位面積あたり単位時間あたりに入射する光のエネルギー I は、

$$I = h\nu n \quad \text{②}$$

となる。式 ① と式 ② より次式を得る。

$$p = \boxed{\frac{2I}{c}} \quad \text{③}$$

(4) 1 個の光子が吸収されるときに光子が帆におよぼす力積は $h\nu/c$ となるので、(2) と同様にして、入射光が帆におよぼす放射圧は $n h\nu/c$ となる。これと式 ② より次式を得る。

$$p = \boxed{\frac{I}{c}}$$

実際の宇宙ヨットでは、帆に入射した光の一部が反射あるいは透過し、残りが吸収される。帆に太陽電池を張り付けておけば、発生する電力を帆の制御や通信に用いることができるが、吸収された光のエネルギーをすべて電気エネルギーに変換することはできず、大部分は熱となって帆を暖める。その結果、帆からその温度で決まるスペクトルを持つ電磁波があらゆる方向へ放射される。実際の帆にはたらく力を求めるときには、これらの反射・透過・吸収・熱放射からの寄与をすべて考慮しなければならない。

II. (5) 宇宙ヨットの速さを v_p とすれば、その運動方程式の向心成分は、

$$m \frac{v_p^2}{r_p} = \frac{G M_\odot m}{r_p^2} \quad (4)$$

となる。これより次式を得る。

$$v_p = \sqrt{\frac{G M_\odot}{r_p}} \quad (5)$$

(6) 太陽系内には太陽光を大量に吸収する物質がないので、太陽を中心とする半径 r_p の球面を単位時間あたりに通過する太陽光のエネルギーは L_\odot となる。よって、この球面でのエネルギー流束密度 I_p は次のようになる。

$$I_p = \frac{L_\odot}{4 \pi r_p^2} \quad (6)$$

(7) 太陽が帆におよぼす放射圧 p_p は、式③と式⑥より、

$$p_p = \frac{2 I_p}{c} = \frac{L_\odot}{2 \pi c r_p^2}$$

となる。よって、面積 S の帆に太陽光がおよぼす力 f_p は次のようになる。

$$f_p = p_p S = \frac{L_\odot S}{2 \pi c r_p^2} \quad (7)$$

(8) 式④と式⑦の右辺の r_p を r に置き換えて、太陽からの距離が r の位置における f と F の比 z を求めれば、

$$z = \frac{f}{F} = \frac{L_\odot S}{2 \pi c G M_\odot m} \quad (8)$$

となり、 r に依存しない。よって、宇宙ヨットの帆に太陽光が常に垂直に入射する限り、宇宙ヨットが太陽系内のどこにあっても z は一定である。

(9) 帆を広げると、宇宙ヨットにはたらく二つの力の合力は、太陽に向かう向きを正として、

$$F - f = (1 - z) F = \frac{G \cdot (1 - z) M_\odot \cdot m}{r_p^2}$$

となる。よって、 $z < 1$ の場合、帆を広げることは、帆を広げていないときに、仮に太陽の質量が M_\odot から $M'_\odot = (1 - z) M_\odot$ になったと見なすことと同じ効果をもたらす。そのように見なして、楕円軌道の遠日点距離を r_a 、遠日点での速さを v_a とすれば、面積速度一定の法則と力学的エネルギー保存則より、次の関係式を得る。

$$\frac{1}{2} r_a v_a = \frac{1}{2} r_p v_p$$

$$\frac{1}{2} m v_a^2 - \frac{G M'_\odot m}{r_a} = \frac{1}{2} m v_p^2 - \frac{G M'_\odot m}{r_p}$$

これらより v_a を消去し、式⑤を用いれば、 r_a に対する2次方程式：

$$(2 M'_\odot - M_\odot) r_a^2 - 2 M'_\odot r_p r_a + M_\odot r_p^2 = 0$$

を得る。 $M'_\odot = (1-z)M_\odot$ と $r_a \neq r_p$ に注意してこれを解けば、

$$r_a = \frac{r_p}{1-2z}$$

となる。 $0 < z < \frac{1}{2}$ のとき r_a は有限で、軌道は楕円になる。ちなみに、図 2 に示すように、軌道の形は z の値で決まる。

- (イ) $z = 0$ のときは、円
- (ロ) $0 < z < \frac{1}{2}$ のときは、楕円
- (ハ) $z = \frac{1}{2}$ のときは、放物線
- (ニ) $\frac{1}{2} < z < 1$ のときは、引力による双曲線
- (ホ) $z = 1$ のときは、直線
- (ヘ) $1 < z$ のときは、斥力による双曲線

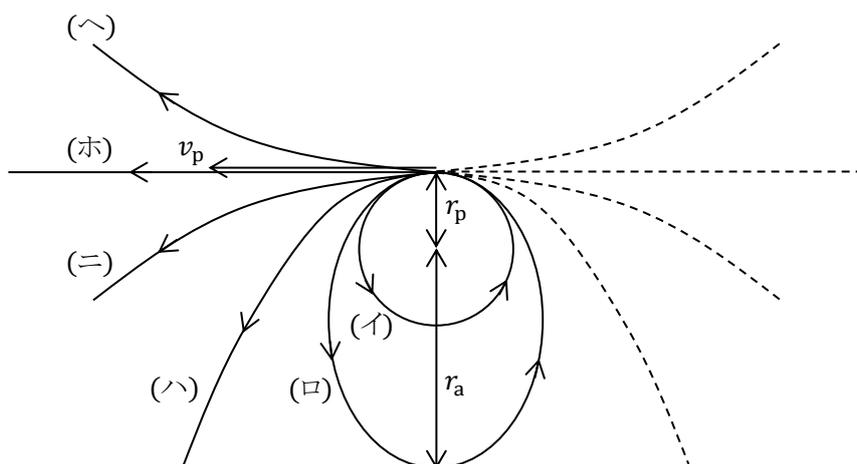


図 2

(10) $z > 1$ の場合には、二つの力の合力は、太陽から離れる向きに、大きさが

$$f - F = \frac{k}{r^2}$$

$$k = \frac{L_\odot S}{2\pi c} - G M_\odot m \tag{9}$$

となる。この力は、二つの同符号の荷電粒子の間にはたらくクーロン斥力と数学的には同じ形をしている。このことから類推できるように、この合力の位置エネルギーは、無限遠を基準にして k/r で与えられる。よって、無限遠での宇宙ヨットの速さを v_∞ とすれば、力学的エネルギー保存則より、次の関係式を得る。

$$\frac{1}{2} m v_\infty^2 = \frac{1}{2} m v_p^2 + \frac{k}{r_p}$$

これより v_∞ を求め、式⑤と式⑨を用いれば、

$$v_{\infty} = \sqrt{v_p^2 + \frac{2k}{m r_p}} = \boxed{\sqrt{\frac{1}{r_p} \left(\frac{L_{\odot} S}{\pi c m} - G M_{\odot} \right)}} \quad (10)$$

となる。

III. (11) 照射レーザー光の放射圧 p は、式③より $2I/c$ であるから、レーザー光が帆におよぼす力 f は、

$$f = p S = \frac{2I}{c} S$$

となる。よって、運動方程式より、宇宙ヨットの加速度 a は次のようになる。

$$a = \frac{f}{m} = \boxed{\frac{2IS}{cm}} \quad (11)$$

(12), (13) 宇宙ヨットは初速度が 0 の等加速度直線運動をするので、

$$r_1 - r_0 = \frac{1}{2} a t_1^2, \quad v_1 = a t_1$$

が成り立つ。これらより t_1 と a を、 r_0, r_1, v_1 を用いて表せば、

$$t_1 = \boxed{\frac{2(r_1 - r_0)}{v_1}} \quad (12)$$

$$a = \boxed{\frac{v_1^2}{2(r_1 - r_0)}} \quad (13)$$

となる。

(14) 式⑫に与えられた数値を代入すれば、

$$t_1 = \frac{2 \times (1.3 - 1.0) \times 1.5 \times 10^{11} \text{ m}}{6.0 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}} = \boxed{1.5 \times 10^3} \text{ s}$$

となる。地球軌道から出発して 25 分で火星軌道近くを通過するのである。

(15) 式⑬に与えられた数値を代入すれば、

$$a = \frac{(6.0 \times 10^7 \text{ m s}^{-1})^2}{2 \times (1.3 - 1.0) \times 1.5 \times 10^{11} \text{ m}} = \boxed{4.0 \times 10^4} \text{ m s}^{-2}$$

となる。地表での重力加速度を g とすれば、この加速度は約 4100 g になる。

(16) 式⑪から I を求めれば、

$$I = \frac{c m a}{2 S} = \frac{3.0 \times 10^8 \text{ m s}^{-1} \times 5.0 \times 10^{-3} \text{ kg} \times 4.0 \times 10^4 \text{ m s}^{-2}}{2 \times 16 \text{ m}^2} \\ = \boxed{1.9 \times 10^9} \text{ W m}^{-2}$$

となる。帆全体への入射エネルギーは、

$$P = I S = 1.875 \times 10^9 \text{ W m}^{-2} \times 16 \text{ m}^2 = 30 \text{ GW}$$

である。

(余談)

宇宙ヨットの具体例として設問 (14) (15) (16) で採用した数値は、Breakthrough Starshot と名付けられた太陽系外天体の探査計画で想定されているものである。この計画では、帆は一辺の長さが 4 m 以下の正方形で質量は数 g、帆に取り付けられた探査機本体は数 cm 四方の大きさで質量は数 g のものを予定している。Star Chip と名付けられたこの微小探査機には、撮影カメラ・制御プロセッサ・制御用光子エンジン・通信用レーザー発振器・核熱源バッテリーなどの機能が詰め込まれることになっている。その表面は、星間気体や宇宙線との衝突の影響を防ぐための保護膜で覆われている。

地上では、10 kW ぐらいのレーザー光源を数 km 四方に多数配置する。各光源から位相を調整して放射されたレーザー光が、帆に平面波となって入射するとき、そのパワーは 100 GW 程度になる。帆による光の反射率は 100% に近いことが望ましいのであるが、そうでない場合には、帆に吸収されたエネルギーによって、帆はプラズマ状態になる可能性がある。その場合でもなおレーザー光を反射して、宇宙ヨットが加速されるための条件が議論されている。

このような帆付 Star Chip を 1000 個ほど母船に載せて、地球周回軌道に待機させる。光源と母船と目的とする天体の位置が最適になったときに、Star Chip を一つずつ打ち出し、地上からのレーザー光で数十分程度加速する。個々の Star Chip は 0.3 AU ほど飛行したときに、速さが $0.2c$ になる。そのときに加速を止めると、Star Chip は等速度で目標天体に向かう。星間気体や宇宙線によって帆あるいは探査機が損傷することがあるかもしれないが、1000 機のうちいくつかは目標天体の近傍を通り過ぎて、目標天体を観測することに成功するだろうと考えられている。獲物を狙って猟師が散弾銃 (shotgun) で散弾を撃ち放つのと似ているので、この計画名称に star shot という言葉が使われたのであろう。

目標の天体は α Cen. (アルファ・センタウリ) で、太陽から 4.4 光年離れた太陽に最も近い恒星である。 α Cen. は 3 重星で、その構成員である Proxima Centauri の周りを、地球ほどの大きさの岩石惑星が回っている。その軌道は水存在可能圏 (habitable zone) 内にあることがわかり、一躍注目を浴びるようになった。いまでは、この惑星を観測することが Breakthrough Starshot の主目的となっている。

この (余談) を書くにあたっては、WIKIPEDIA を参考にした。

演習問題では、宇宙ヨットの運動を計算するのにニュートン力学を用いたが、宇宙ヨットの速さが光速に近づくとときには、相対論的運動方程式を用いて計算しなければならない。これについては、問題 15 の解説 (大学生向き) で説明する。

(大学レベルの追加説明) (2023/08/27)

この問題では、宇宙ヨットはニュートンの運動方程式：

$$ma = pS \rightarrow \frac{d}{dt}(mv) = \frac{2I}{c}S$$

に従って運動すると仮定した。しかし、速度 v が光速 c に近づくと、次の相対論的運動方程式に従うようになる。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 c \beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = 2w \frac{1-\beta}{1+\beta} S \quad (1)$$

ここにおいて、 m_0 はヨットの静止質量、 $\beta = \frac{v}{c}$ で、 $\frac{m_0 c \beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$ はヨットの相対論的運動量である。

右辺の w は、レーザー光源から見たときの入射レーザー光のエネルギー密度で、 $I = cw$ の関係がある。ヨットの帆全体に向かうレーザー光の単位時間あたりのエネルギーを Q とすれば、

$$Q = IS = cwS \quad (2)$$

が成り立ち、式 (1) は次のように書き換えられる。

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{2Q}{m_0 c^2} (1-\beta)^2 \sqrt{1-\beta^2} \quad (3)$$

Q が一定であれば、この微分方程式は簡単に解ける。これについては、「[問題 15 の解説 \(大学生向き\)](#)」で述べる。

相対論の領域では、式 (1) の右辺にあるように、放射圧 p は、

$$p = 2w \frac{1-\beta}{1+\beta} \quad (4)$$

で与えられる。この式は、特殊相対性理論に関するアインシュタインの 1905 年の論文 (文献 1) で証明されている (注 1)。その証明を、少し長くなるが、以下に書き写す。

レーザー光源から見て、ヨットの速さが v になったとき、レーザー光が入射角 $\varphi = 0$ で帆に入射したとすると、帆が受け取る単位面積あたり単位時間あたりのエネルギー I は $(c-v)w$ となる。帆で全反射したとき、反射レーザー光のエネルギー密度を w''' とすると、帆が送り返す単位面積あたり単位時間あたりのエネルギー I''' は $(c+v)w'''$ となる。その差は放射圧 p が帆にする仕事率となるので、

$$pv = I - I''' = w \left\{ (c-v) - \frac{w'''}{w} (c+v) \right\} \quad (5)$$

が成り立つ。電磁波のエネルギー密度は電場 (あるいは磁束密度) の振幅の 2 乗に比例するので、入射波と反射波の振幅をそれぞれ A, A''' とすると、

$$\frac{w'''}{w} = \left(\frac{A'''}{A} \right)^2 \quad (6)$$

となる。一方、あとで証明するように、

$$\frac{A'''}{A} = \frac{1-\beta}{1+\beta} \quad (7)$$

が成り立つので、式(5),(6),(7)より、次式を得る。

$$\begin{aligned} p &= \frac{w}{v} \left\{ (c-v) - \left(\frac{A'''}{A} \right)^2 (c+v) \right\} \\ &= \frac{w}{\beta} \left\{ (1-\beta) - \left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right)^2 (1+\beta) \right\} \\ &= 2w \frac{1-\beta}{1+\beta} \quad (\text{証明終}) \end{aligned}$$

レーザー光源から見て、帆全体で送り返される単位時間あたりのエネルギー Q''' は、

$$Q''' = I''' S = c w''' S \quad (8)$$

であるから、入射波に対する反射波のエネルギーの比率は、式(2),(8),(6),(7)より、

$$\frac{Q'''}{Q} = \frac{w'''}{w} = \left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right)^2 \quad (9)$$

と表される。「問題 15 の解説 (大学生向き)」で、この式を別の方法で導出する。

式(7)の証明は次のようになる。

静止系 K の時空を (t, x, y, z) として、電場 (E_x, E_y, E_z) と磁束密度 (B_x, B_y, B_z) は、次のマクスウェル方程式を満たす。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} &= \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} & \frac{\partial B_x}{\partial t} &= - \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} &= \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} & \frac{\partial B_y}{\partial t} &= - \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} & \frac{\partial B_z}{\partial t} &= - \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} &= 0 & \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

この電磁場を、 x 軸の正の向きに速さ v で移動する運動系 k で観測する。 k 系の時空を (τ, ξ, η, ζ) 、観測される電場を $(E'_\xi, E'_\eta, E'_\zeta)$ 、磁束密度を $(B'_\xi, B'_\eta, B'_\zeta)$ として、ローレンツ変換：

$$\tau = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right), \quad \xi = \gamma (x - vt), \quad \eta = y, \quad \zeta = z \quad (11)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \gamma \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - v \frac{\partial}{\partial \xi} \right), \quad \frac{\partial}{\partial x} = \gamma \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial \tau} \right), \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \zeta}$$

を式 (10) に施し, K 系と k 系でマックスウェル方程式は同じ形の式で表されるという相対性原理を適用すれば, 次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} E'_\xi &= E_x, & E'_\eta &= \gamma (E_y - v B_z), & E'_\zeta &= \gamma (E_z + v B_y) \\ B'_\xi &= B_x, & B'_\eta &= \gamma \left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right), & B'_\zeta &= \gamma \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

次に, K 系で真空中を伝播する平面電磁波を考え, その電場と磁束密度が,

$$\left. \begin{aligned} E_x &= E_{x0} \sin \Phi, & E_y &= E_{y0} \sin \Phi, & E_z &= E_{z0} \sin \Phi, \\ B_x &= B_{x0} \sin \Phi, & B_y &= B_{y0} \sin \Phi, & B_z &= B_{z0} \sin \Phi, \\ \Phi &= \omega \{ t - (\ell x + m y + n z) / c \} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

で与えられるとする。(ℓ, m, n) は波面の単位法線ベクトルの (x, y, z) 成分, すなわち方向余弦である。この電磁波を k 系で観測すれば, ローレンツ変換によって, その振幅は式 (12) のように変換され, 位相 Φ もローレンツ変換されて, 最終的には次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} E'_\xi &= E_{x0} \sin \Phi', & B'_\xi &= B_{x0} \sin \Phi', \\ E'_\eta &= \gamma (E_{y0} - v B_{z0}) \sin \Phi', & B'_\eta &= \gamma \left(B_{y0} + \frac{v}{c^2} E_{z0} \right) \sin \Phi', \\ E'_\zeta &= \gamma (E_{z0} + v B_{y0}) \sin \Phi', & B'_\zeta &= \gamma \left(B_{z0} - \frac{v}{c^2} E_{y0} \right) \sin \Phi', \\ \Phi' &= \omega' \{ \tau - (\ell' \xi + m' \eta + n' \zeta) / c \} \\ \omega' &= \omega \gamma (1 - \ell \beta) \\ \ell' &= (\ell - \beta) / (1 - \ell \beta), & m' &= m / \{ \gamma (1 - \ell \beta) \}, & n' &= n / \{ \gamma (1 - \ell \beta) \} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

いま, 遠くにある光源が K 系に静止しており, 観測者が k 系に静止しているとする。すなわち, 観測者が K 系の x 軸の正の向きに速さ v で動いているとする。観測者のところまで伝わって, 平面波となった光の進行方向と観測者の速度 \vec{v} の向きがなす角を φ とすれば, 一般性を失うことなく, ℓ = cos φ, m = sin φ, n = 0 としよ。このとき, 式 (14) の ω' は,

$$\omega' = \omega \frac{1 - (v/c) \cos \varphi}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (15)$$

と表され, 相対論的なドップラー効果の公式となる。また, k 系から観測したときに光の進行方向と ξ 軸の正の向きがなす角を φ' とすれば, ℓ' = cos φ' となり, 式 (14) の ℓ' は,

$$\cos \varphi' = \frac{\cos \varphi - (v/c)}{1 - (v/c) \cos \varphi} \quad (16)$$

と書き換えられる。これは相対論的な光行差の公式である。

以上の式は, 相対論のどの教科書にも載っており, 導出計算も容易である。ところが, K 系における電磁波の振幅 A と k 系で観測したときの振幅 A' の関係は, 関心を持たれることが少なく, 導出計算も少し長くなることもあつてか, 筆者の手元にある 10 冊ほどの教科書のどれにも載っていない。載っているのはアインシュタインの原論文だけである。

以下では, 電場の振幅で A' / A を求める。磁束密度の振幅で計算しても結果は同じである。

まず, A と A' は,

$$A^2 = E_{x0}^2 + E_{y0}^2 + E_{z0}^2 \quad (17)$$

$$(A')^2 = (E_{\xi 0}')^2 + (E_{\eta 0}')^2 + (E_{\zeta 0}')^2 \quad (18)$$

と表される。式 (18) に式 (12) を代入すれば,

$$\begin{aligned} (A')^2/\gamma^2 &= \{1 - (v/c)^2\} E_{x0}^2 + (E_{y0}^2 - 2v E_{y0} B_{z0} + v^2 B_{z0}^2) + (E_{z0}^2 + 2v E_{z0} B_{y0} + v^2 B_{y0}^2) \\ &= (E_{x0}^2 + E_{y0}^2 + E_{z0}^2) - 2v (E_{y0} B_{z0} - E_{z0} B_{y0}) + v^2 (-E_{x0}^2/c^2 + B_{z0}^2 + B_{y0}^2) \end{aligned} \quad (19)$$

となる。一方, 式 (10) に式 (13) を代入すれば次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_z}{\partial t} &= - \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \rightarrow \omega B_{z0} \cos \Phi = \omega \left(\frac{\ell}{c} E_{y0} - \frac{m}{c} E_{x0} \right) \cos \Phi \\ &\rightarrow B_{z0} = (\ell E_{y0} - m E_{x0}) / c \\ \frac{\partial B_y}{\partial t} &= - \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \rightarrow B_{y0} = (n E_{x0} - \ell E_{z0}) / c \end{aligned} \quad (20)$$

これらを用いて, 式 (19) の第 2 項の () 内を計算すると,

$$E_{y0} B_{z0} - E_{z0} B_{y0} = \{ \ell E_{y0}^2 - (m E_{y0} + n E_{z0}) E_{x0} + \ell E_{z0}^2 \} / c \quad (21)$$

となる。また, $\text{div } \vec{E} = 0$ より,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = -\frac{\omega}{c} (\ell E_{x0} + m E_{y0} + n E_{z0}) \cos \Phi \\ &\rightarrow m E_{y0} + n E_{z0} = -\ell E_{x0} \end{aligned} \quad (22)$$

を得る。式 (22) を式 (21) に代入し, さらにそれを式 (19) の第 2 項に代入すれば,

$$-2v (E_{y0} B_{z0} - E_{z0} B_{y0}) = -2 \frac{v}{c} \ell (E_{y0}^2 + E_{x0}^2 + E_{z0}^2) = -2 \frac{v \ell}{c} A^2 \quad (23)$$

となる。さらに, 式 (20) を式 (19) の第 3 項に代入すれば,

$$\begin{aligned} &v^2 (-E_{x0}^2/c^2 + B_{z0}^2 + B_{y0}^2) \\ &= \left(\frac{v}{c} \right)^2 \{ -E_{x0}^2 + (\ell^2 E_{y0}^2 - 2\ell m E_{y0} E_{x0} + m^2 E_{x0}^2) + (n^2 E_{z0}^2 - 2n\ell E_{x0} E_{z0} + \ell^2 E_{z0}^2) \} \\ &= \left(\frac{v}{c} \right)^2 \{ -(1 - m^2 - n^2) E_{x0}^2 + \ell^2 E_{y0}^2 + \ell^2 E_{z0}^2 - 2\ell E_{x0} (m E_{y0} + n E_{z0}) \} \\ &= \left(\frac{v}{c} \right)^2 \{ -\ell^2 E_{x0}^2 + \ell^2 E_{y0}^2 + \ell^2 E_{z0}^2 - 2\ell E_{x0} (-\ell E_{x0}) \} \\ &= \left(\frac{v \ell}{c} \right)^2 (E_{x0}^2 + E_{y0}^2 + E_{z0}^2) = \left(\frac{v \ell}{c} \right)^2 A^2 \end{aligned} \quad (24)$$

となる。式 (19) と式 (23), (24) より,

$$A' = \gamma A \left(1 - \frac{v}{c} \ell \right) = A \frac{1 - (v/c) \cos \varphi}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (25)$$

を得る。

いま, ξ 軸に垂直で光を全反射する鏡が \mathbf{k} 系に静止 (\mathbf{K} 系に対して速さ v で移動) しているとすると, φ' は \mathbf{k} 系から見たときの鏡への入射角である。 \mathbf{k} 系から見たときの反射光の進行方向と ξ 軸

の正の向きのなす角を φ'' , 反射光の振幅を A'' とすると,

$$\varphi'' = \pi - \varphi', \quad A'' = A' \quad (26)$$

が成り立つ。この反射光を K 系で観測したとき, その振幅を A''' とすれば, 式 (25) と同様の式が成り立ち,

$$\begin{aligned} A''' &= A'' \frac{1 - (-v/c) \cos \varphi''}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = A' \frac{1 + (v/c)(-\cos \varphi')}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \\ &= A \frac{1 - (v/c) \cos \varphi}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \frac{1 - \frac{v}{c} \frac{\cos \varphi - (v/c)}{1 - (v/c) \cos \varphi}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \\ &= A \frac{1 - 2(v/c) \cos \varphi + (v/c)^2}{1 - (v/c)^2} \end{aligned} \quad (27)$$

となる。よって, 入射角 φ が 0 のときは,

$$\frac{A'''}{A} = \frac{1 - (v/c)}{1 + (v/c)} = \frac{1 - \beta}{1 + \beta}$$

となる。 (証明終)

(文献 1)

アインシュタイン : 相対性理論 内山龍雄 訳・解説 岩波文庫

この訳本に使われている用語・記号・単位系は適宜, 現在の読者にとってわかりやすいものに変えてある。本稿では, この訳本に従って引用する。

(注 1)

本稿では $\beta = \frac{v}{c}$ であるが, アインシュタインの論文では, β の定義は $\frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$ となっているので注意されたい。現在では, ローレンツ因子 $\frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$ を表すのに γ を用いることが多い。

[他の演習問題へ](#)