

### 問題 14 スイングバイ (改訂版)

I. 図 1 のように、太陽  $S$  を中心として、地球  $P_0$  と外惑星  $P_1, P_2$  がそれぞれ半径  $r_0, r_1, r_2$  の円軌道を描いている。いま、惑星探査機  $A$  が地球の円軌道  $K_0$  に沿って公転しているときに、短時間エンジンをはたらかせて進行方向に加速し、楕円軌道に乗り移る。加速時間を調節すれば、楕円軌道の遠日点距離を  $r_1$  あるいは  $r_2$  にすることができる。これらの楕円軌道を  $K_1, K_2$  とする。燃料を除いた探査機本体の質量を  $m$  とすると、その力学的エネルギー (運動エネルギーと太陽の万有引力による位置エネルギーの和)  $E$  は、

$$E = -\frac{G M_S m}{d}$$

で与えられる。ただし、 $G$  は万有引力定数、 $M_S$  は太陽の質量、 $d$  は楕円軌道の長直径で、無限遠を位置エネルギーの基準点としている。

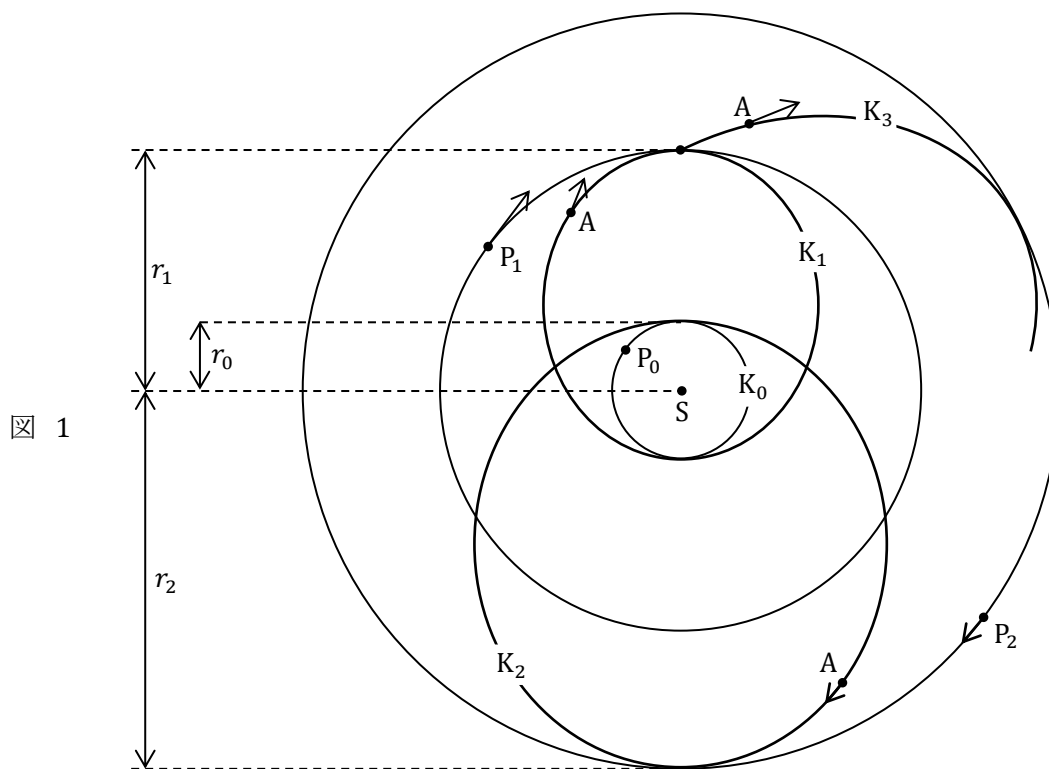


図 1

問 1 円軌道  $K_0$  から楕円軌道  $K_1$  に乗り移るとき、探査機本体の力学的エネルギーはどれだけ増加するか。その増加量  $\Delta E_1$  を、 $G, M_S, m, r_0, r_1$  を用いて表せ。

問 2 同様に、楕円軌道  $K_2$  に乗り移るとき増加量を  $\Delta E_2$  として、 $\Delta E_2 / \Delta E_1$  を求めよ。

問 3 外惑星  $P_1$  を木星、 $P_2$  を土星とすれば、 $r_1 = 5.2 r_0, r_2 = 9.5 r_0$  である。このとき、 $\Delta E_2 / \Delta E_1$  の値はいくらになるか。

探査機 A が楕円軌道  $K_1$  の遠日点に達したときに、木星がその点を通り、探査機 A に万有引力をおよぼして、その軌道を  $K_1$  から図 1 に示した  $K_3$  に変えてしまうことが起こり得る。その場合、探査機 A は木星の軌道に達することができる最小限のエネルギーで、土星の軌道に到達することができる。したがって、土星を探索するときに、軌道  $K_1$  から軌道  $K_3$  に乗り移ることができれば、軌道  $K_2$  で到達するより、燃料を大幅に節約できる。このような軌道修正をスイングバイという。

II. 探査機 A が惑星 P から万有引力を受けて、その軌道を大きく変える時間は、惑星 P の公転周期に比べれば十分短く、その間に探査機 A が太陽から受ける万有引力は、惑星 P から受ける万有引力に比べれば十分小さい。そして、その間の惑星 P の運動は等速直線運動と見なすことができ、惑星 P に対する探査機 A の相対運動の軌道は双曲線となる。その双曲線が、図 2 に示すように、

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (x > 0, a > 0, b > 0)$$

と表されるように、座標軸  $(x, y)$  を設定する。点 P は双曲線の焦点の一つで、そこに惑星 P がある。探査機 A は無限遠で大きさ  $v_0$  の相対速度をもち、漸近線  $y = -\frac{b}{a}x$  に沿って惑星 P に近づき、漸近線  $y = \frac{b}{a}x$  に沿って無限遠へ遠ざかる。惑星 P に最も近づいたときの A P 間の距離は  $r_p$  で、そのときの探査機の速さは  $v_p$  である。漸近線と  $x$  軸のなす角度を  $\theta$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) とする。座標原点 O と焦点 P の間の距離は  $\sqrt{a^2 + b^2}$  であり、焦点 P と漸近線の間の距離は  $b$  である。

距離  $b$  と接近前の相対速度の大きさ  $v_0$  が与えられれば、距離  $a$  と角度  $\theta$  がわかり、探査機の軌道が確定する。

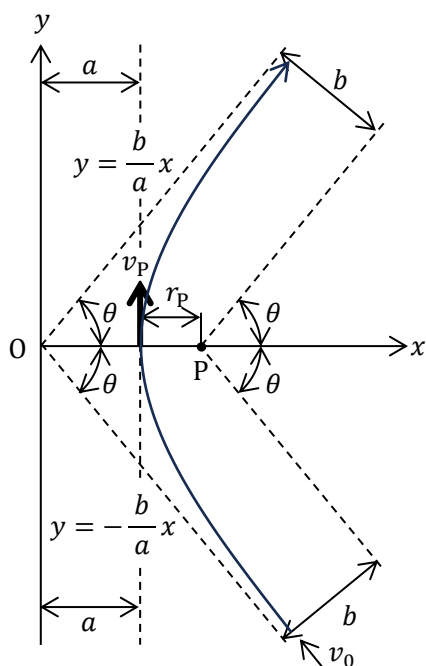


図 2

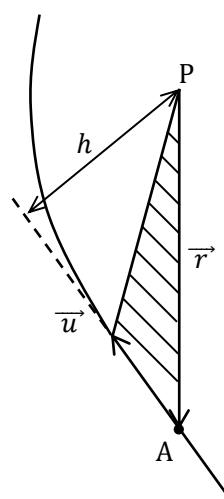


図 3

問4 探査機 A (質量  $m$ ) が図 2 の双曲線に沿って運動するとき、惑星 P (質量  $M$ ) から見れば、探査機の面積速度と力学的エネルギーが保存される。それらを適用して、 $G, M, m, a, b, v_0, r_p, v_p$  の間に成り立つ二つの関係式を、これらの物理量のうち必要なものを用いて表せ。探査機 A の面積速度は、図 3 のように、惑星 P から見た探査機 A の位置ベクトル  $\vec{r}$  と速度ベクトル  $\vec{u}$  で作られる三角形の面積  $\frac{1}{2}h[\vec{u}]$  に等しい。

問5 問4 の二つの関係式から  $r_p$  と  $v_p$  を求め、 $G, M, b, v_0$  を用いて表せ。

問6 角度  $\theta$  の正接  $\tan \theta$  を、 $G, M, b, v_0$  を用いて表せ。

III. 探査機 A が惑星 P の近傍を通り過ぎる間、太陽に対する惑星 P の速度は一定と見なせる。その速度の大きさを  $V$ 、速度の向きと  $x$  軸の正の向きのなす角度を、図 4 のように、 $\phi$  とする。ただし、 $-\pi \leq \phi < \pi$  とする。

問7 太陽から探査機 A を見たとき、惑星 P の近傍を通過することによって、探査機 A の運動エネルギーはどれだけ変化するか。その変化量を、 $m, v_0, V, \phi, \theta$  を用いて表せ。

問8 惑星 P の近傍を通過することによって、探査機 A が加速されるためには、換言すれば、太陽から見たときの運動エネルギーが増加するためには、 $\phi$  はどのような条件を満たさなければならないか。

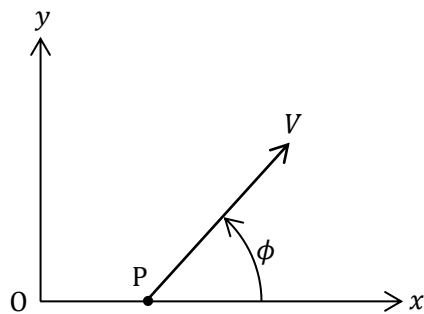


図 4

## 問題 14 の解答と解説

太陽系内を運動する惑星探査機を目的とする惑星とは別の惑星に接近させることによって、その軌道を大きく変え、探査機を加速あるいは減速させる方法をスイングバイ (swing-by) という。

いくつかの大学の入試問題でスイングバイが取り上げられているが、この問題を作成するときに参考にしたのは、大阪大学の 2007 年度後期の入試問題である。

### I.

問 1 軌道  $K_0$  にあるときと、軌道  $K_1$  にあるときの探査機本体の力学的エネルギーを、それぞれ  $E_0$ ,  $E_1$  とする。

それぞれの軌道の長直径は  $2r_0$ ,  $r_1 + r_0$  であるから、 $\Delta E_1$  は次のように表される。

$$\begin{aligned} \Delta E_1 = E_1 - E_0 &= \left( -\frac{G M_S m}{r_1 + r_0} \right) - \left( -\frac{G M_S m}{2r_0} \right) \\ &= \boxed{\frac{G M_S m}{2r_0} \frac{r_1 - r_0}{r_1 + r_0}} \end{aligned}$$

問 2 同様にして、

$$\Delta E_2 = \frac{G M_S m}{2r_0} \frac{r_2 - r_0}{r_2 + r_0}$$

となるから、求める比は次のようになる。

$$\frac{\Delta E_2}{\Delta E_1} = \boxed{\frac{r_2 - r_0}{r_2 + r_0} \frac{r_1 + r_0}{r_1 - r_0}} \quad (1)$$

問 3 問題文に与えられた値 :  $r_1 = 5.2r_0$ ,  $r_2 = 9.5r_0$  を式 (1) に代入すれば、

$$\frac{\Delta E_2}{\Delta E_1} = \frac{8.5}{10.5} \times \frac{6.2}{4.2} \doteq \boxed{1.2}$$

となる。すなわち、地球から土星に向かうとき、軌道  $K_2$  より軌道  $K_1$  と軌道  $K_3$  を選んだ方が、要するエネルギーが 20% ほど少なくて済むのである。

### II.

問 4 探査機 A が無限遠で図 2 の漸近線に沿って惑星 P に近づくととき、惑星 P に最も近づいたときとで、その面積速度が等しいことから、

$$\boxed{\frac{1}{2} v_0 b = \frac{1}{2} v_P r_P} \quad (2)$$

が成り立ち、力学的エネルギーが等しいことから、

$$\boxed{\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_P^2 - G \frac{M m}{r_P}} \quad (3)$$

が成り立つ。

問5 式(2)から得られる  $r_p = v_0 b / v_p$  を式(3)に代入して整理すれば、 $v_p$  に対する2次方程式：

$$b v_0 v_p^2 - 2 G M v_p - b v_0^3 = 0$$

を得る。これを解き、 $v_p > 0$  に注意すれば、

$$v_p = \frac{G M}{v_0 b} + \sqrt{\left(\frac{G M}{v_0 b}\right)^2 + v_0^2} \quad (4)$$

となる。さらに、式(2)と式(4)より  $r_p$  を求めれば、次のようになる。

$$\begin{aligned} r_p = \frac{v_0 b}{v_p} &= \frac{v_0 b}{\frac{G M}{v_0 b} + \sqrt{\left(\frac{G M}{v_0 b}\right)^2 + v_0^2}} \\ &= \frac{v_0 b}{\sqrt{\left(\frac{G M}{v_0^2}\right)^2 + b^2} - \frac{G M}{v_0^2}} \end{aligned} \quad (5)$$

問6 軌道が  $x$  軸を横切る位置  $(a, 0)$  を点 Q と呼ぶことにする (図5参照)。

$\overline{OP} = \overline{OQ} + \overline{QP}$  で、問題に与えられているように、 $\overline{OP} = \sqrt{a^2 + b^2}$  であるから、

$$\sqrt{a^2 + b^2} = a + r_p$$

が成り立つ。これを  $a$  について解けば、

$$a = \frac{b^2 - r_p^2}{2 r_p} \quad (6)$$

となる。一方、 $\tan \theta$  は漸近線  $y = \frac{b}{a} x$  の勾配であるから、式(6)を用いて、

$$\tan \theta = \frac{b}{a} = \frac{2 b r_p}{b^2 - r_p^2}$$

と表される。右辺の  $r_p$  に式(5)を代入すれば、

$$\tan \theta = \frac{2 b \left\{ \sqrt{\left(\frac{G M}{v_0^2}\right)^2 + b^2} - \frac{G M}{v_0^2} \right\}}{2 \frac{G M}{v_0^2} \left\{ \sqrt{\left(\frac{G M}{v_0^2}\right)^2 + b^2} - \frac{G M}{v_0^2} \right\}} = \frac{v_0^2 b}{G M} \quad (7)$$

となる。

ちなみに、 $a$  は次のようになる。

$$a = \frac{b}{\tan \theta} = \frac{G M}{v_0^2}$$

(注)  $\overline{OP} = \sqrt{a^2 + b^2}$  の証明

図5において、

$$\angle POQ' = \angle P'OQ \quad \text{かつ} \quad \overline{PQ'} = b = \overline{P'Q}$$

であるから、二つの直角三角形  $\triangle POQ'$  と  $\triangle P'OQ$  は合同である。よって、

$$\overline{OQ'} = \overline{OQ} = a$$

となり、三平方の定理より次式を得る。

$$\overline{OP} = \sqrt{\overline{OQ'}^2 + \overline{PQ'}^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

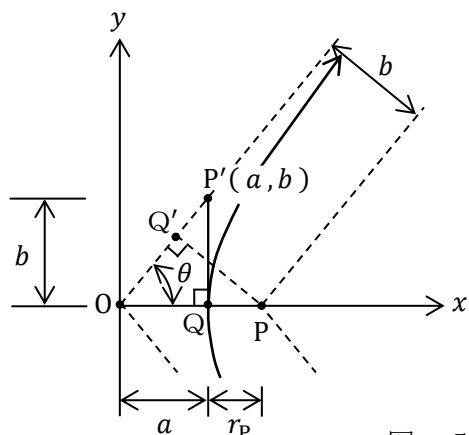


図 5

III.

問 7 太陽から見た探査機 A の速度は、太陽から見た惑星 P の速度に、惑星 P に対する探査機 A の相対速度をベクトルの的に足したものであるから、接近前と接近後で、

$$\text{接近前} : \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \cos \phi - v_0 \cos \theta \\ V \sin \phi + v_0 \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$\text{接近後} : \begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \cos \phi + v_0 \cos \theta \\ V \sin \phi + v_0 \sin \theta \end{pmatrix}$$

となる。これを用いれば、惑星 P に接近する前後で、探査機 A の運動エネルギーの変化量  $\Delta K$  は、

$$\begin{aligned} \Delta K &= \frac{1}{2} m (v_x'^2 + v_y'^2) - \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2) \\ &= \frac{1}{2} m (v_x'^2 - v_x^2) \\ &= \boxed{2 m V v_0 \cos \phi \cos \theta} \end{aligned} \tag{8}$$

となる。

問 8 図 2 の  $\theta$  は、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  であるから、 $\cos \theta > 0$  である。よって、 $\Delta K > 0$  となるのは  $\cos \phi > 0$

のときである。この問題では、 $-\pi < \phi < \pi$  と制限されているので、答は、

$$\boxed{-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}} \tag{9}$$

となる。

この結果を、図を用いて説明すれば次のようになる。

$0 < \phi < \frac{\pi}{2}$  の場合には、探査機 A は図 6 a のように、公転速度  $\vec{V}$  で動いている惑星 P の後側を

通過するので、太陽から見た探査機 A は惑星 P に引きずられて加速される。

同様に、 $-\frac{\pi}{2} < \phi < 0$  の場合にも加速される。

$\frac{\pi}{2} < \phi < \pi$  の場合には、探査機 A は図 6 b のように、惑星 P の前側を通過するので、太陽から見た探査機 A は惑星 P に引き止められて減速される。

同様に、 $-\pi < \phi < -\frac{\pi}{2}$  の場合にも減速される。

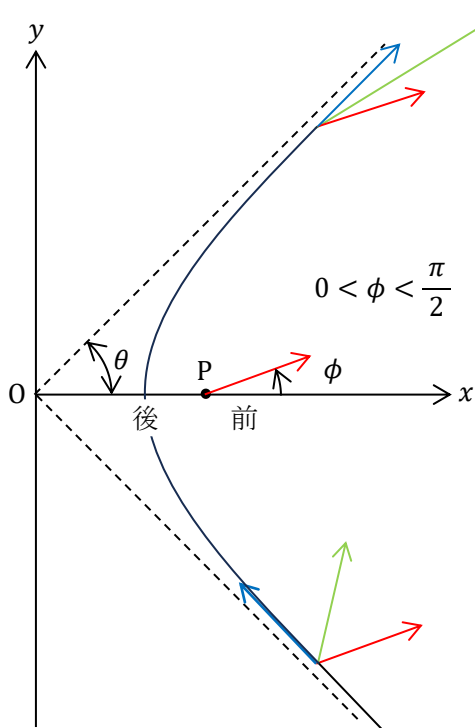


図 6 a

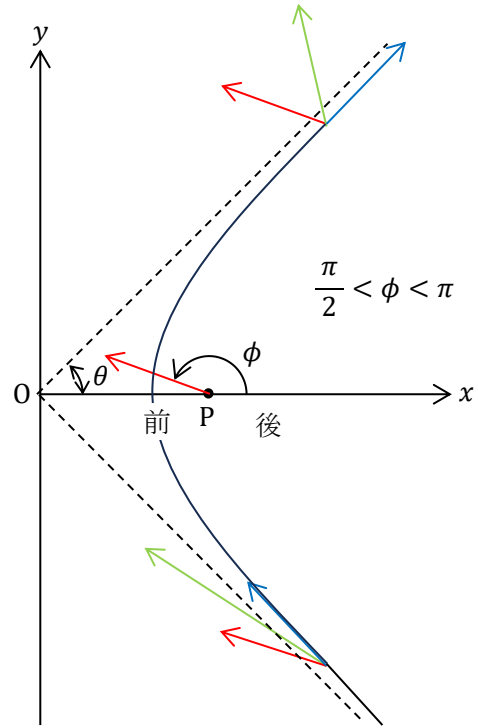


図 6 b

- : 太陽に対する惑星の速度  $\vec{V}$       → : 惑星に対する探査機の相対速度  
→ : 太陽に対する探査機の色度

[補注]

探査機がスイングバイによって加速されるとき, その力学的エネルギーの増加量は, 惑星の力学的エネルギーの減少量に等しい。その結果, 惑星の軌道が変化する。その変化量がどの程度なのかを見積ってみよう。

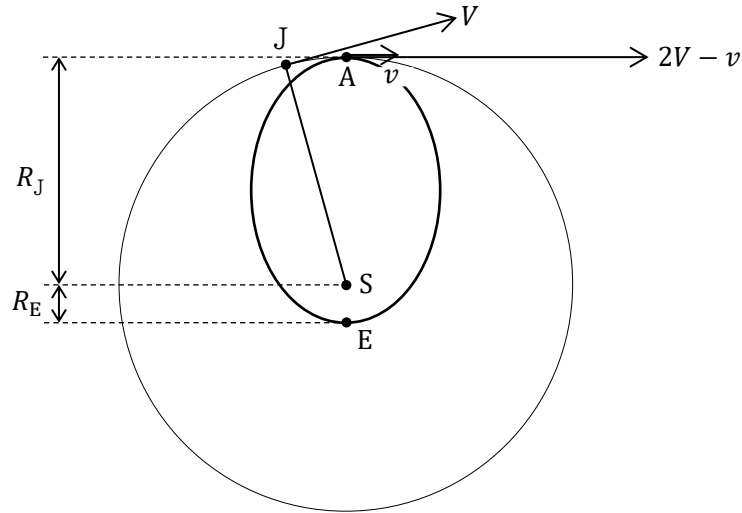


図 7

一例として, 木星によるスイングバイを考える。図7のように, 太陽S (質量  $M_S$ ) を中心とする半径  $R_J$  の円軌道上を木星J (質量  $M_J$ ) が速さ  $V$  で公転しており, 地球Eから打ち上げた探査機A (質量  $m$ ) が長直径  $R_J + R_E$  の楕円軌道上を木星と同じ向きに公転しているとする。 $R_E$  は地球の軌道半径である。まず, 木星の運動方程式の向心成分から,

$$V = \sqrt{\frac{G M_S}{R_J}} \quad (a)$$

を得る。つぎに, 探査機の遠日点での速さ  $v$  を, 面積速度一定の法則と力学的エネルギー保存則を用いて求めれば,

$$v = \sqrt{\frac{G M_S}{R_J} \cdot \frac{2 R_E}{R_J + R_E}} \quad (b)$$

となる。いま, 簡単のために, 探査機が遠日点に達したときに, 後から木星に追いつかれ, スイングバイによって前方へ弾き飛ばされたとする。すなわち, 図4と図2において,  $\phi = 0, \theta \cong 0$ , とすれば,

$$v_0 \cong V - v = \sqrt{\frac{G M_S}{R_J}} \left( 1 - \sqrt{\frac{2 R_E}{R_J + R_E}} \right)$$

となる。このとき, 探査機の力学的エネルギーの増加量  $\Delta E_A$  は, 式(8)より, 次のようになる。



$$\Delta E_A = 2 m V v_0 = 2 m \frac{G M_S}{R_J} \left( 1 - \sqrt{\frac{2 R_E}{R_J + R_E}} \right) \quad (c)$$

スイングバイ後の木星の軌道は円軌道のままとし、木星の軌道半径の変化量を  $\Delta R_J$ 、位置エネルギーの変化量  $\Delta U_J$ 、力学的エネルギーの変化量  $\Delta E_J$  とすれば、

$$\Delta U_J = \frac{d}{d R_J} \left( - \frac{G M_S M_J}{R_J} \right) \Delta R_J = \frac{G M_S M_J}{R_J^2} \Delta R_J \quad (d)$$

と表される。また、[「負の比熱とヴァリアル定理」](#)の §2 より、

$$\Delta U_J = 2 \Delta E_J \quad (e)$$

が成り立つ。これらより  $\Delta R_J$  を求めれば、次のようになる。

$$\begin{aligned} \Delta R_J &= \frac{R_J^2}{G M_S M_J} \Delta U_J \stackrel{(e)}{=} \frac{2 R_J^2}{G M_S M_J} \Delta E_J \\ &= - \frac{2 R_J^2}{G M_S M_J} \Delta E_A \quad (\text{なぜなら, } \Delta E_J = -\Delta E_A) \\ &\stackrel{(c)}{=} - \frac{2 R_J^2}{G M_S M_J} 2 m \frac{G M_S}{R_J} \left( 1 - \sqrt{\frac{2 R_E}{R_J + R_E}} \right) \\ &= - \frac{4 m}{M_J} R_J \left( 1 - \sqrt{\frac{2 R_E}{R_J + R_E}} \right) \quad (f) \end{aligned}$$

いま仮に、 $m = 10^3 \text{ kg}$  とし、 $M_J = 1.9 \times 10^{27} \text{ kg}$ 、 $R_J = 5.2 R_E = 7.8 \times 10^{11} \text{ m}$  を式 (f) に代入すれば、

$$\Delta R_J = - \frac{4 \times 10^3 \text{ kg}}{1.9 \times 10^{27} \text{ kg}} \times 7.8 \times 10^{11} \text{ m} \times \left( 1 - \sqrt{\frac{2}{6.2}} \right) = -7.1 \times 10^{-13} \text{ m}$$

となる。すなわち、木星から見て、質量が 1 トンの探査機を逆向きに弾き飛ばすと、木星の軌道半径は水素原子の大きさの 1 % 程度だけ小さくなるのである。これはもう軌道の変化と言えるような量ではない。

[他の演習問題へ](#)