問題13　熱気球とガス気球の最大到達高度

気球はどこまで上昇できるのかを知りたい。そのためには大気の温度・圧力・密度の高度分布がわかっていなければならない。ここでは一例として等温大気の場合を考える。すなわち，気温 T は高度 z に依らず，一定であるとする。

以下では，空気を理想気体とし，気体定数を R ，単位物質量あたりの空気の質量を μ_{A} とする。また，重力加速度の大きさ g は高度 z に依らず，一定であるとする。

(**A**)　大気が静かなときに，図 1 のような鉛直の気柱を考える。高度 z のところにある薄い空気層の厚さを Δz , 密度を ρ ，下面と上面での気圧をそれぞれ p , $p + \Delta p$ ($\Delta p < 0$) とする。

(1)　この空気層にはたらく力のつりあいより，圧力勾配 $\Delta p/\Delta z$ を求めよ。

(2)　この空気層の状態方程式を，T , ρ , p , R , μ_{A} を用いて表せ。

以上 2 式より p を消去すれば，ρ が満たすべき方程式 ：

$$\frac{\Delta\rho}{\Delta z} = -\frac{\rho}{z_{\mathrm{e}}} \qquad (z_{\mathrm{e}} \text{ は } R , \mu_{\mathrm{A}} , g , T \text{ で表される定数}) \tag{i}$$

を得る。地表 ($z = 0$) での密度を ρ_0 とすれば，式 (i) を満たす密度は，

$$\rho = \rho_0\, e^{-z/z_{\mathrm{e}}} \qquad (e \text{ は自然対数の底}) \tag{ii}$$

と表される。高度 z_{e} で密度 ρ は ρ_0 の e^{-1} ($= 0.3679\cdots$) 倍になるので，z_{e} は等温大気の厚さを表す目安となる。

(3)　大気の温度 T が 288 K (= 15 ℃) であるときの z_{e} の値を有効数字 2 桁で求めよ。計算では次の数値を用いよ。

$R = 8.3\ \mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$,
$\mu_{\mathrm{A}} = 29 \times 10^{-3}\ \mathrm{kg\,mol^{-1}}$,
$g = 9.8\ \mathrm{m\,s^{-2}}$

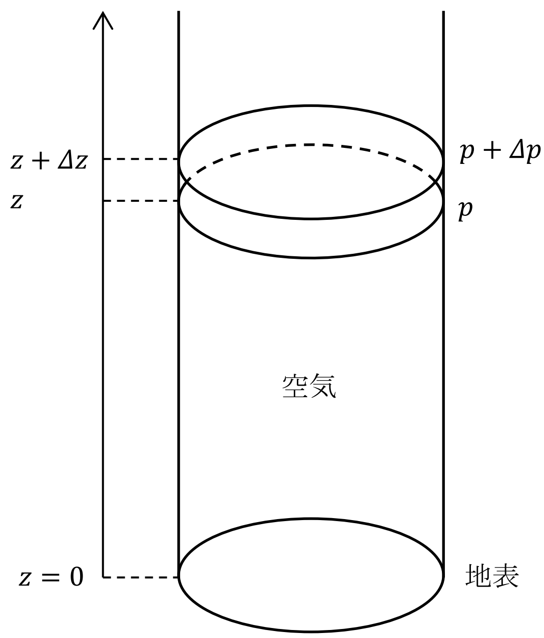


図　1

(**B**)　図 2 は上昇中の熱気球を表している。現在では，熱気球は遊覧飛行やスカイスポーツに用いられている。

球皮が完全に膨らんでいるときの気球の全体積を V，折りたたんだ球皮とバスケット・搭乗員・ヒーターの全質量を M とする。球皮の内側の空気は下部の開口部によって外側の大気と通じているので，球皮内の気圧は常に周囲の大気圧 p に等しい。

地上でヒーターをはたらかせて球皮内の空気を熱すると，球皮が完全に膨らんで気球は立ち上がる。大気は温度 T の等温大気とする。

(4)　球皮内の温度が $T'\ (>T)$ になったときの球皮内の空気の密度 ρ_0' を求め，ρ_0 , T, T' を用いて表せ。ρ_0 は地表における大気の密度である。

(5)　気球が地面から浮き上がるのに必要な温度 T' の最小値 $T'_{\rm min}$ を求め，T, ρ_0 , V , M を用いて表せ。

浮き上がらないように係留綱で気球を留め置いて，温度が $T_{\rm C}'\ (>T'_{\rm min})$ になるまで球皮内の空気を熱する。そのあとヒーターを調節して，球皮内の温度を $T_{\rm C}'$ に保つ。ここで係留綱を解くと気球は加速上昇する。上昇中の気球には浮力と重力と大気の抵抗力がはたらく。そのとき気球の体積 V と球皮内空気を除く質量 M は変化しないが，周囲の大気の密度 ρ が減少するので，やがて気球は空中で静止する。静止する高度を $z_{\rm m}$ とし，そこでの大気の密度を $\rho_{\rm m}$ とする。

(6)　$\rho_{\rm m}$ を，V , M , T , $T_{\rm C}'$ を用いて表せ。

次の具体例で気球が静止する高度，すなわち，熱気球の最大到達高度を求めてみよう。

等温大気　：　$T = 288$ K ($= 15$ ℃)，$\rho_0 = 1.22\ {\rm kg\ m^{-3}}$,
地表での気圧 $p_0 = 1013$ hPa ($= 1$ 気圧)

熱気球　　：　$V = 1500\ {\rm m^3}$，$M = 300$ kg ,
この場合，$T'_{\rm min} = 344$ K ($= 71$ ℃)

(7)　この具体例において，$T_{\rm C}' = 373$ K ($= 100$ ℃) とすれば，$\rho_{\rm m}$ はいくらになるか。有効数字 2 桁で求めよ。

(8)　(**A**) で求めた等温大気の密度分布関数 $\rho\,(z)$ を用いて，$z_{\rm m}$ の値を有効数字 2 桁で求めよ。計算では次の数値を用いよ。 $\log 1.39 = 0.329$

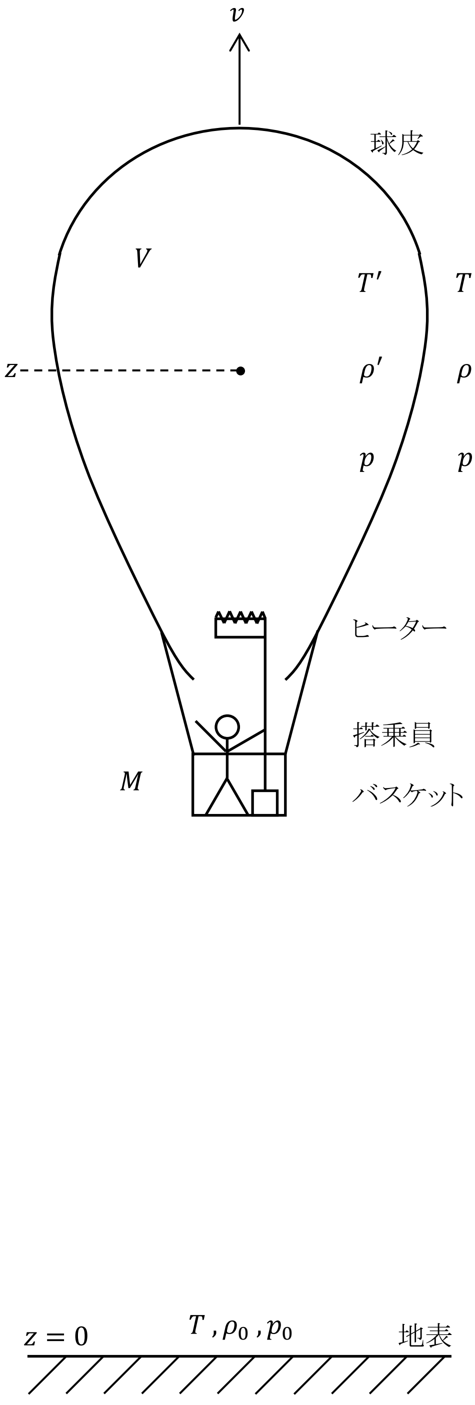

v
球皮
V
T′
T
z
ρ′
ρ
p
p
ヒーター
搭乗員
M
バスケット
z = 0
T , ρ0 , p0
地表

図　2

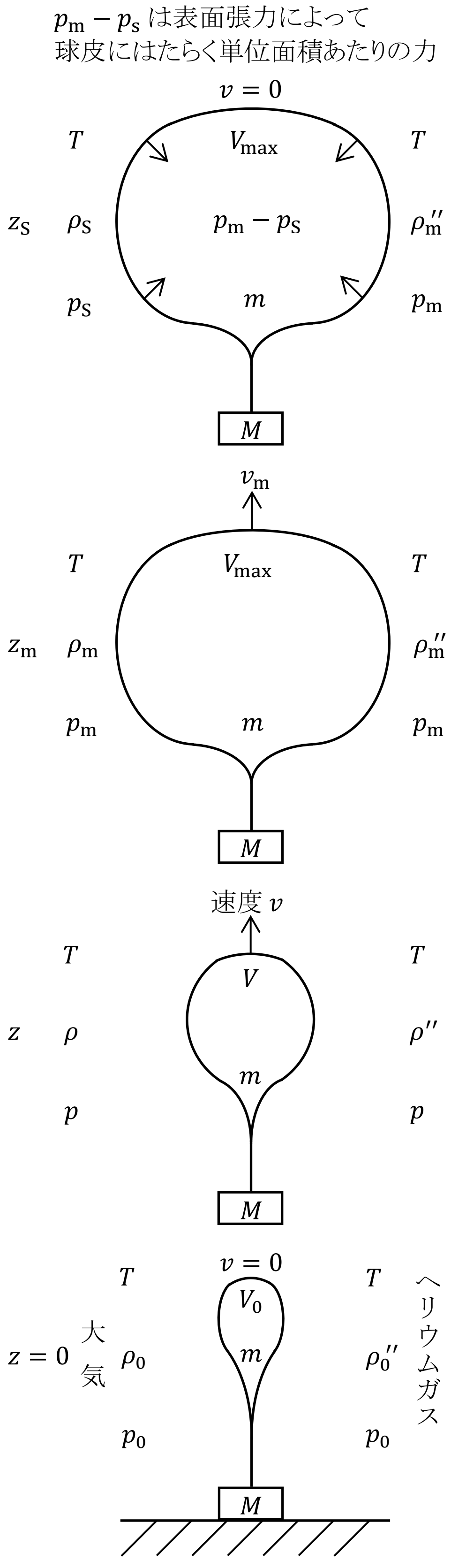

pm − ps は表面張力によって
球皮にはたらく単位面積あたりの力
v = 0
T
Vmax
T
zs
ρs
pm − ps
ρm″
ps
m
pm
M
vm
T
Vmax
T
zm
ρm
ρm″
pm
m
pm
M
速度 v
T
V
T
z
ρ
ρ″
m
p
p
M
v = 0
T
V0
T
ヘリウムガス
z = 0
大気
ρ0
m
ρ0″
p0
p0
M

図　3

(**C**)　図 3 は，ヘリウムのような軽い気体を封入したガス気球が上昇する様子を表している。ガス気球は気象観測・天体観測・軍事偵察などに用いられている。

球皮内に密閉された気体の質量は，気球が上昇している間，一定に保たれる。球皮が完全に膨らんで容積が最大値の V_{max} になるまでは，球皮内の気体の圧力は周囲の大気圧 p に等しく，その体積は気球が上昇するにつれて大きくなる。折りたたんだ球皮と観測機器の全質量を M とする。

以下では，大気は温度 T の等温大気，封入する気体はヘリウムとし，ヘリウムの単位物質量あたりの質量を μ_{He}とする。ヘリウムガスは理想気体と見なしてよい。大気による抵抗力のために，気球はゆっくり上昇すると仮定する。また，球皮は熱の良導体で作られているとする。この場合，ヘリウムガスの温度は常に気球周囲の気温に等しくなる。

(9)　地上でヘリウムガスを球皮内に注入し，密閉後しばらく放置したとき，ヘリウムガスの密度はいくらになるか。ρ_0 , μ_{A} , μ_{He} を用いて表せ。ρ_0 は地上における大気の密度である。

(10)　気球を浮上させるのに必要なヘリウムの質量の最小値 m_{min} を求め，M , μ_{A} , μ_{He} を用いて表せ。ただし，観測機器にはたらく浮力は無視できるものとする。

(11)　封入したヘリウムガスの質量 m が m_{min} より大きいとき，放球後の気球はゆっくり上昇し，やがてヘリウムガスの体積 V が V_{max} になる。そのとき，周囲の大気の密度 ρ_{m} はいくらか。V_{max} , m , μ_{A} , μ_{He} を用いて表せ。

気球がさらに上昇すると，ヘリウムガスの体積は V_{max} からほとんど変化しないので，その圧力もほとんど変化しない。一方，周囲の大気圧は小さくなる。そのために球皮がわずかに膨らむ。その結果，表面積の増加に伴う弾性力 (表面張力という) によって，球皮にはたらく力のつりあいが保たれる。球皮が破れることなくそのまま上昇すれば，浮力が徐々に減少し，やがて気球は静止する。

(12)　静止したとき，周囲の大気の密度はいくらか。V_{max} , m , M を用いて表せ。ただし，球皮のわずかな膨らみによる容積の増加は無視できるものとする。

(13)　具体例として，$T = 288\ \mathrm{K}$，$\rho_0 = 1.22\ \mathrm{kg\ m^{-3}}$ の等温大気と $V_{\mathrm{max}} = 3.0 \times 10^5\ \mathrm{m^3}$，$M = 400\ \mathrm{kg}$ の気球を想定し，$m = 1100\ \mathrm{kg}$ のヘリウムガスを封入した場合を考える。この気球が到達する最大高度を有効数字 2 桁で求めよ。計算では次の数値を用いよ。 $\log 244 = 5.5$

問題 13 の解答と解説

熱気球やガス気球の浮上条件と最大到達高度を求める問題は，大学入試の頻出問題である。入試問題では，計算を簡単にするために，等温大気を採用することが多い。しかし，この仮定は現実離れしているので，これから求まる最大到達高度は実際と大きく食い違う。この点が気になる出題者は，実際の気温・気圧・密度を近似的に表したグラフを与えて，最大到達高度を求めさせている。これについてはあとで述べる。

重力が作用する等温気体柱の問題は，京都大学 (2018 年) , 東京大学 (2008 年) などで出題されていてめずらしくないが，その圧力・密度の高度分布が必要となる場合は，微分方程式を解かねばならないので，さすがにその解は問題文に与えられている。

(**A**) (1) 空気層にはたらく力のつりあいの式は，気柱の断面積を S として，

$$0 = p\,S - (\,p + \Delta p\,)\,S - \rho\,(\,S\,\Delta z\,)\,g$$

となる。これより大気圧の勾配は次のようになる。

$$\frac{\Delta p}{\Delta z} = \boxed{-\rho\,g} \qquad ①$$

(2) 空気層の物質量は $\rho\,S\,\Delta z\,/\,\mu_{\mathrm{A}}$ であるから，状態方程式は，

$$p\,(\,S\,\Delta z\,) = \frac{\rho\,S\,\Delta z}{\mu_{\mathrm{A}}}\,R\,T$$

と表される。これより，

$$\boxed{p = \frac{R}{\mu_{\mathrm{A}}}\,\rho\,T} \qquad ②$$

を得る。式 ② を式 ① に代入し，T が z に依らないことに注意すれば，

$$\frac{\Delta\rho}{\Delta z} = -\frac{\mu_{\mathrm{A}}\,g}{R\,T}\,\rho \qquad ③$$

となる。よって，

$$z_{\mathrm{e}} = \frac{R\,T}{\mu_{\mathrm{A}}\,g} \qquad ④$$

である。$\Delta z \to 0$ の極限では，式 ③ は微分方程式 ：

$$\frac{\mathrm{d}\,\rho}{\mathrm{d}\,z} = -\frac{1}{z_{\mathrm{e}}}\,\rho \qquad ⑤$$

となる。式 ⑤ の両辺を ρ で割って，z で 0 から z まで積分すれば，次のようになる。

$$-\int_0^z \frac{1}{z_{\mathrm{e}}}\,\mathrm{d}z = \int_0^z \frac{1}{\rho}\,\frac{\mathrm{d}\,\rho}{\mathrm{d}\,z}\,\mathrm{d}\,z = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{1}{\rho}\,\mathrm{d}\,\rho$$

$$\to \quad -\frac{1}{z_{\mathrm{e}}}\,z = \log\rho - \log\rho_0 = \log\frac{\rho}{\rho_0}$$

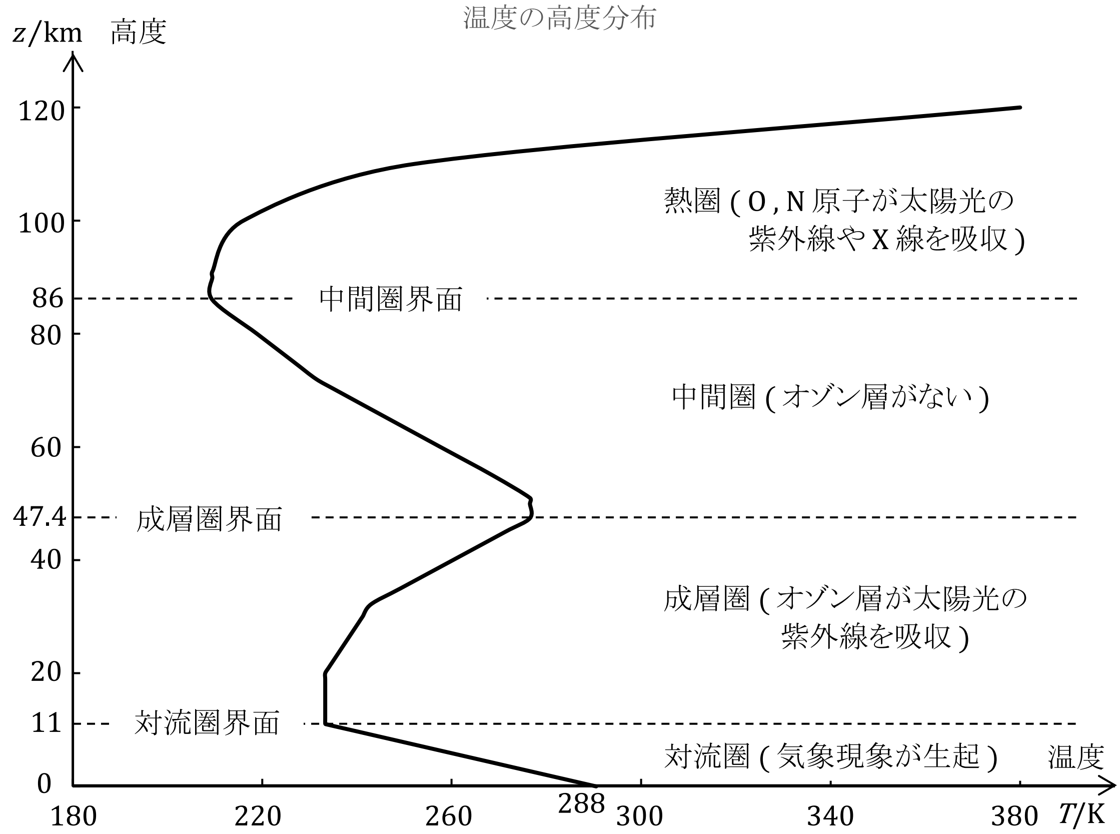
$$\to \quad \rho = \rho_0\,e^{-z/z_{\mathrm{e}}} \qquad ⑥$$

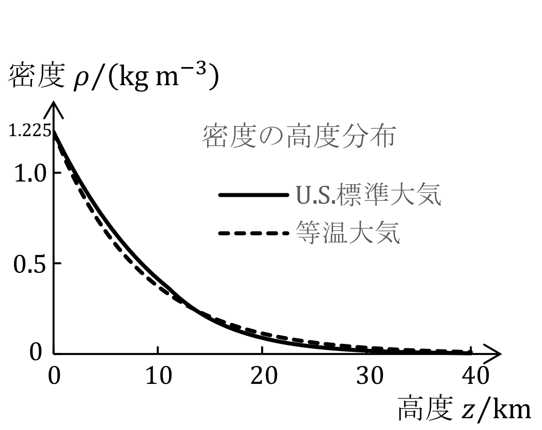
(3) 与えられた数値を式④に代入すれば，次のようになる。

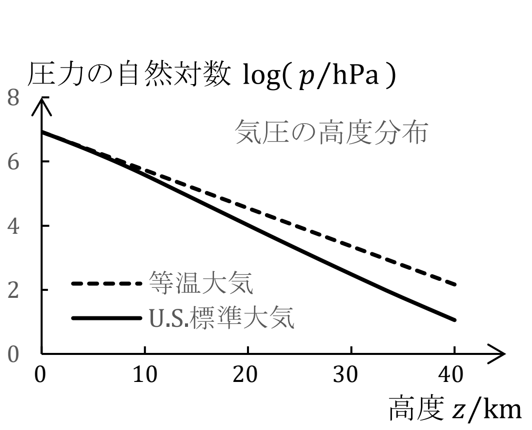
$$z_{\mathrm{e}} = \frac{8.3\ \mathrm{J\ mol^{-1}\ K^{-1}} \times 288\ \mathrm{K}}{29 \times 10^{-3}\ \mathrm{kg\ m^{-3}} \times 9.8\ \mathrm{m\ s^{-2}}} = 8.41 \times 10^{3}\ \mathrm{m} \fallingdotseq \boxed{8.4\ \mathrm{km}}$$

(補注 1)

大気の上層と下層の間で常にエネルギーのやりとりが十分に行われておれば，大気全体が熱平衡状態となり，温度はどこでも同じになる。しかし，実際の大気はそのようになっておらず，高度が上がるにつれて温度は複雑に変化する。温度・密度・圧力の高度分布は緯度と季節によって異なる。参考のために，大気モデルのひとつとして「理科年表」に載っている「U.S.標準大気」を下に書き写す。







(**B**) (4)　地上における大気の状態方程式は，大気圧を p_0 として，式 ② と同様に，

$$p_0 = \frac{R}{\mu_A}\,\rho_0\,T$$

と表される。球皮内の空気の状態方程式は，その気圧が p_0 に等しいので，

$$p_0 = \frac{R}{\mu_A}\,\rho_0'\,T'$$

となる。以上 2 式より，次式を得る。

$$\rho_0' = \boxed{\rho_0\,\frac{T}{T'}} \qquad ⑦$$

(5)　気球にはたらく浮力は $\rho_0\,V\,g$ であるから，浮上条件 (浮力> 重力) は，

$$\rho_0\,V\,g \;>\; \rho_0'\,V\,g + M\,g$$

となる。右辺の ρ_0' に式 ⑦ を代入し，この不等式を T' について解けば，

$$T' > \boxed{T\,\frac{\rho_0\,V}{\rho_0\,V - M}} = T'_{\min}$$

を得る。

(6)　大気の密度が ρ_m のとき，球皮内の空気の密度 ρ_m' は，式 ⑦ と同様に，$\rho_m' = \rho_m\,(\,T/\,T_C'\,)$ と表されるから，静止している気球にはたらく力のつりあいの式は，

$$0 = \rho_m\,V\,g - (\,\rho_m\,\frac{T}{T_C'}\,)\,Vg - Mg$$

となる。これより次式を得る。

$$\rho_m = \boxed{\frac{T_C'}{T_C' - T}\,\frac{M}{V}} \qquad ⑧$$

(7)　式 ⑧ に与えられた数値を代入すれば，次のようになる。

$$\rho_m = \frac{373\ \mathrm{K}}{373\ \mathrm{K} - 288\ \mathrm{K}}\,\frac{300\ \mathrm{kg}}{1500\ \mathrm{m}^3} = 0.878\ \mathrm{kg\ m^{-3}} \fallingdotseq \boxed{0.88\ \mathrm{kg\ m^{-3}}}$$

(8)　式 ⑥ より，z_m は，

$$z_m = z_e\,\log\frac{\rho_0}{\rho_m}$$

と表される。これに (3) と (7) で得られた数値を代入すれば，次のようになる。

$$z_m = 8.41\ \mathrm{km} \times \log\frac{1.22\ \mathrm{kg\ m^{-3}}}{0.878\ \mathrm{kg\ m^{-3}}} = 8.41\ \mathrm{km} \times 0.329 \fallingdotseq \boxed{2.8\ \mathrm{km}}$$

(**補注 2**)

(a)　実際の熱気球では，プロパンガスをバーナーで燃焼させて球皮内の空気を熱する。燃料を消費するので，上昇中に M が減少する。この問題ではその影響を無視している。

(b)　球皮内の実際の温度・密度・圧力は一様ではない。これらの平均値が $T', \rho', p' \approx p$ である。

気球の周囲の大気圧も，気球の上部と下部で異なっている。そうでないと浮力が生じない。これらの平均値が p である。浮力については，問題 9　浮沈子とガリレオ温度計 に記述がある。

(c)　熱気球の運動方程式を立てるのは簡単ではない。球皮内の空気を熱するとその一部が外へ排出され，気球の質量が減少する。またそのとき，排出された空気は球皮周辺の大気の流れに影響を及ぼす。球皮の外面に接触している大気が球皮に及ぼす応力の総和が浮力と抵抗力になるのだから，浮力と抵抗力は熱い空気の排出によって何らかの影響を受けるはずである。一言で言えば，熱気球の運動を論じるときには，周囲の大気の運動も考慮しなければならないのである。それはボールの投げ上げ運動の場合でも同じであるが，ボールに比べれば，熱気球の運動は格段に難しい。

(d)　(**補注 1**) で述べたように，実際の大気は等温ではない。「U.S.標準大気」の場合に熱気球の最大到達高度を計算すると，次のようになる。

この標準大気の温度と密度を $T_{\mathrm{US}}\,(z)$, $\rho_{\mathrm{US}}\,(z)$ とすると，ここで考えている熱気球が静止する高度 z は，

$$\left\{1-\frac{T_{\mathrm{US}}\,(z)}{T_{\mathrm{C}}'}\right\}\rho_{\mathrm{US}}\,(z)=\frac{M}{V}$$

を満たす。$T_{\mathrm{C}}'=373\ \mathrm{K}$ として，左辺の関数値を計算し，それが $M/V=0.2\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$ となる z を求めれば，$z=7.5\ \mathrm{km}$ となり，等温大気を仮定して求めた高さの 2.7 倍になる。

2023年現在，熱気球による最大到達高度の世界記録は，2005年にインド人の Vijaypat Singhania によって達成された 21 km である。

(**C**) (9)　ヘリウムガスの密度を ρ_0'' とし，地上での大気圧を p_0 とすれば，状態方程式は，

$$\text{大気}\ :\ p_0=\frac{R}{\mu_{\mathrm{A}}}\,\rho_0\ T \qquad ⑨$$

$$\text{ヘリウムガス}\ :\ p_0=\frac{R}{\mu_{\mathrm{He}}}\,\rho_0''\ T \qquad ⑩$$

と表される。これら 2 式より次式を得る。

$$\rho_0''=\boxed{\frac{\mu_{\mathrm{He}}}{\mu_{\mathrm{A}}}\,\rho_0} \qquad ⑪$$

(10)　地上におけるヘリウムガスの体積 V_0 は，密度 ρ_0'' の定義と式 ⑪ より，

$$V_0=\frac{m}{\rho_0''}=\frac{\mu_{\mathrm{A}}}{\mu_{\mathrm{He}}}\,\frac{m}{\rho_0} \qquad ⑫$$

と表される。気球の浮上条件 ：

浮力 ($\rho_0\,V_0\,g$) $>$ 重力 ($m\,g+M\,g$)

に式 ⑫ を代入して，m について解けば，次のようになる。

$$m\ >\ \boxed{\frac{\mu_{\mathrm{He}}}{\mu_{\mathrm{A}}-\mu_{\mathrm{He}}}\,M}\ =\ m_{\min} \qquad ⑬$$

(11)　ヘリウムガスの体積 V が V_{max} になったとき，その密度 ρ_{m}'' は m/V_{max} となる。$V = V_{\mathrm{max}}$ となるまでは，球皮の内側と外側で温度と圧力が等しいので，式 ⑪ と同様の式 ：

$$\rho_{\mathrm{m}}'' = \frac{\mu_{\mathrm{M_e}}}{\mu_{\mathrm{A}}}\,\rho_{\mathrm{m}}$$

が成り立つ。これより次式を得る。

$$\rho_{\mathrm{m}} = \frac{\mu_{\mathrm{A}}}{\mu_{\mathrm{He}}}\,\rho_{\mathrm{m}}'' = \boxed{\frac{\mu_{\mathrm{A}}}{\mu_{\mathrm{He}}}\,\frac{m}{V_{\mathrm{max}}}} \qquad ⑭$$

(12)　静止する高度 z_{S} での大気の密度を ρ_{S} とすれば，気球にはたらく力のつりあいより，

$$0 = \rho_{\mathrm{S}}\,V_{\mathrm{m}}\,g - (\,m + M\,)\,g$$

が成り立つ。これより次式を得る。

$$\rho_{\mathrm{S}} = \boxed{\frac{m + M}{V_{\mathrm{m}}}} \qquad ⑮$$

(13)　与えられた数値を式⑮ に代入すれば，

$$\rho_{\mathrm{S}} = \frac{1100\ \mathrm{kg}\ + 400\ \mathrm{kg}}{3 \times 10^5\ \mathrm{m}^3} = 5 \times 10^{-3}\ \mathrm{kg\ m^{-3}}$$

となる。(**B**) の(8)と同様にして z_{S} を求めれば，

$$z_{\mathrm{S}} = z_{\mathrm{e}}\ \log\frac{\rho_0}{\rho_{\mathrm{S}}} = 8.41\ \mathrm{km} \times \log\frac{1.22}{0.005} = 8.41\ \mathrm{km} \times 5.5\ \fallingdotseq\ \boxed{46\ \mathrm{km}}$$

となる。

(**補注 3**)　等温大気ではなく，(**補注 1**) の「U.S.標準大気」を想定して，$\rho = \rho_{\mathrm{S}}$ となる z を，(**補注 1**) に描かれている $\rho_{\mathrm{US}}(z)$ のグラフから読み取れば，$z = 39$ km となる。因みに，$\rho = \rho_{\mathrm{m}} = 0.016\ \mathrm{kg\ m^{-3}}$ となる z を同様に読み取れば，$z = 30$ km である。

(**余談**)

2023 年現在，ガス気球による最大到達高度の世界記録は，2013 年に宇宙航空研究開発機構 (JAXA) が達成した 53.7 km である。

金星には二酸化炭素と窒素を主成分とする大気があり，地表の温度は平均 460 ℃ で気圧は 93 atm である。上空には硫酸と水蒸気から成る分厚い雲があり，その上層部では，最大速度が 100 m/s にもなる熱潮汐波による風が吹いている。そのような世界へ気球を送り込み，雲の下で 36 km 前後の高度を保ちながら，金星の大気を観測する計画がある。耐酸性の円筒形気嚢(のう)には水が入れてあり，これが蒸発して気嚢を膨らませるという。夢があっておもしろい計画だが，一回の探査で成功させるのは難しいだろうなあ。

他の演習問題へ