問題 12　レーザー冷却

近年，レーザー冷却およびそれによってもたらされた極低温での物理現象に関する分野から，ノーベル物理学賞の受賞者が続出している。レーザー冷却の原理を理解するためにはゼーマン効果の知識が必要となるので，まずはその説明から始める。

(A)　図 1 のように，一様な磁場 $\overrightarrow{H}$ のなかで，紙面に垂直な軸 O のまわりに回転することができる磁石がある。その N 極と S 極の磁荷はそれぞれ q_{m} , $-q_{\mathrm{m}}$ で，S 極から見た N 極の位置ベクトルは $\overrightarrow{\ell}$ である。磁荷 q_{m} と $-q_{\mathrm{m}}$ が磁場 $\overrightarrow{H}$ から受ける力による磁石の位置エネルギーを $U(\theta)$ とする。ただし，θ は $\overrightarrow{\ell}$ と $\overrightarrow{H}$ のなす角度である。

問 1　$\theta = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$ の位置で $U(\theta) = 0$ とすれば，

$$U(\theta) = -q_{\mathrm{m}}\overrightarrow{\ell}\cdot\overrightarrow{H} \tag{1}$$

と表せることを示せ。ただし，ドット ・ はベクトルの内積である。

ベクトル $q_{\mathrm{m}}\overrightarrow{\ell}$ をこの磁石の磁気双極子モーメントという。$\overrightarrow{H}$ の代わりに磁束密度 $\overrightarrow{B} = \mu_0\overrightarrow{H}$ (μ_0 は真空の透磁率) を用いて，$U(\theta)$ を表せば，

$$U(\theta) = -\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{B}$$

となる。ただし，$\overrightarrow{m} = q_{\mathrm{m}}\overrightarrow{\ell}/\mu_0$ で，ここでは $\overrightarrow{m}$ を磁気モーメントと呼ぶことにする。

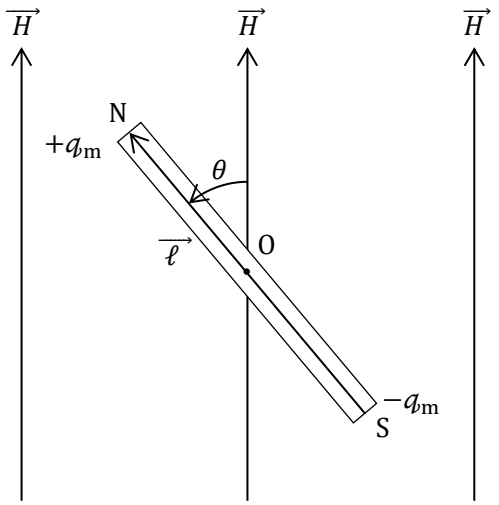

図　1

(B) 原子内の電子は原子核のまわりを回っているので，その軌道に沿って電流が流れる。電流は周りの空間に磁場を作るので，軌道上を回る電子は一つの磁石と等価になる。また，電子は自転に相当する物理量 (スピン) を持っているので，電子自体が一つの磁石になっている。このような微小磁石の磁気モーメントの和が原子の磁気モーメント $\overrightarrow{m}$ になる。原子核も磁気モーメントを持っているが，その質量が電子の質量より桁違いに大きいために，電子の磁気モーメントに比べれば無視できる。

量子力学によれば，$\overrightarrow{m}$ の大きさは $\dfrac{e}{2\,m_{\mathrm{e}}}\dfrac{h}{2\,\pi}\,J$ で与えられる。ここに，e は電気素量，m_{e} は電子の質量，h はプランク定数，J は整数 ($0\,,1\,,2\,,\cdots$) か半整数 $\left(\dfrac{1}{2}\,,\dfrac{3}{2}\,,\dfrac{5}{2}\,,\cdots\right)$ である。

ここからは原子 A が放射する光のスペクトルについて考える。磁場がないとき，この原子の基底状態と第 1 励起状態のエネルギー準位を，図 2a のように，それぞれ $E_1\,,E_2$ とする。

問 2　原子 A がエネルギー準位 E_2 から E_1 へ遷移するときに放射される光の波長 λ_{A} を，$E_1\,,E_2\,,h$ と光速 c を用いて表せ。

原子 A に磁束密度 $\overrightarrow{B}$ の磁場をかけると，エネルギー準位 E_1 と E_2 に式 (1) で表される位置エネルギーが付け加わる。ところが原子の世界では，$U(\theta)$ は連続的な値をとることができず，次式で表される離散的な値をとる。

$$U=\frac{e}{2\,m_{\mathrm{e}}}\,\frac{h}{2\,\pi}\,g\,B\,M \tag{2}$$

ただし，$B=\left|\overrightarrow{B}\right|$ で，M は $J,J-1\,,\cdots,-(\,J-1\,)\,,-J$ のいずれかの値をとる。M を磁気量子数という。g はランデの g 因子と呼ばれる数値で，光を発する電子の状態に依存する有理数である。ここでは簡単のために，$g=1$ とする。

いま仮に，原子 A がエネルギー準位 E_2 にあるときの J を 2 とし，エネルギー準位 E_1 にあるときの J を 1 とすると，磁場があるときのエネルギー準位は図 2 b のように分裂する。分裂したエネルギー準位の間隔 ΔE は，式 (2) より，

$$\Delta E=\mu_{\mathrm{B}}\,B\,,\qquad \mu_{\mathrm{B}}=\frac{e}{2\,m_{\mathrm{e}}}\,\frac{h}{2\,\pi} \tag{3}$$

であるから，磁場を強くすると ΔE は大きくなる。μ_{B} をボーア磁子という。

量子力学によれば，図 2 b の上の 5 つのエネルギー準位から下の 3 つのエネルギー準位へ遷移するときには，選択規則があり，磁気量子数 M の値が 1 だけ増加するか，変化しないか，1 だけ減少する場合にのみ遷移することができる。

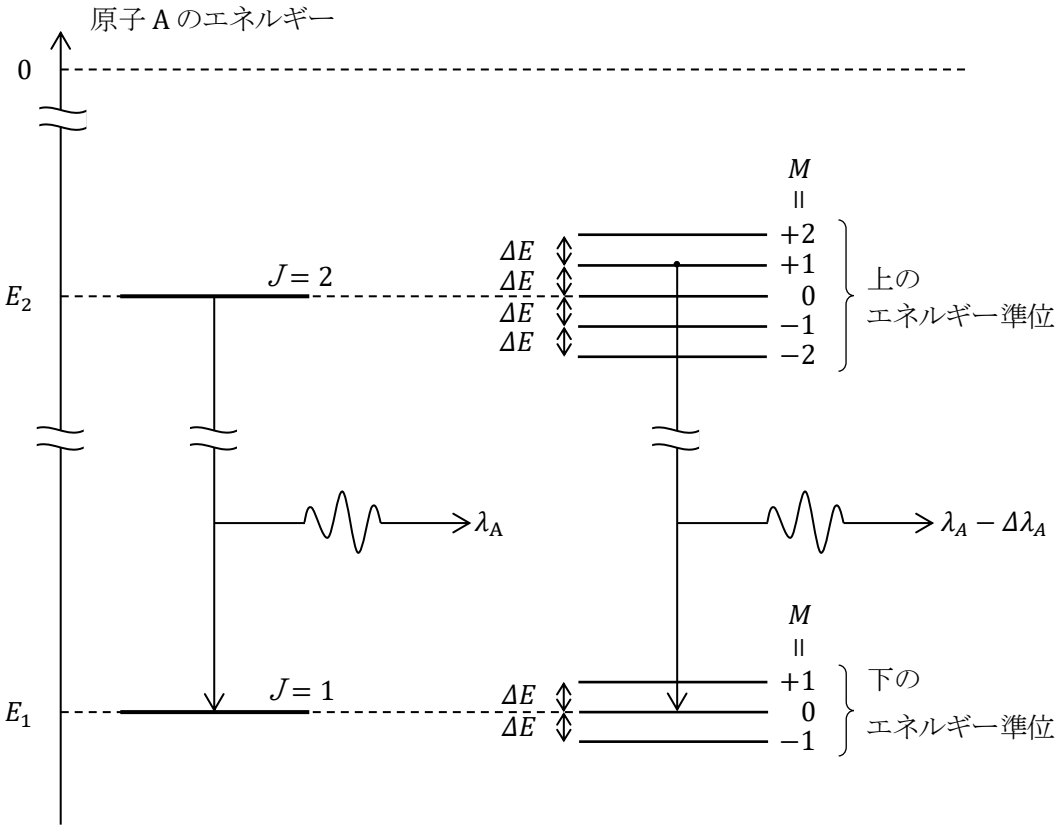

図　2 a　　図　2 b

問 3　図 2b のようなエネルギー準位をもつ原子 A から成る気体 A の温度を高くして，多くの原子 A が上のどのエネルギー準位にも励起されるようにすれば，この気体から放射される光のスペクトルは，波長 λ_A の近傍でどのようになるかを，次の図に示せ。

また，それらの波長の間隔 $\Delta\lambda_A$ はいくらになるか，$\Delta E \ll E_2 - E_1$ として近似計算をし，λ_A，ΔE，$E_2 - E_1$ を用いて表せ。なお，$|\varepsilon| \ll 1$ のとき $(1+\varepsilon)^{-1} \fallingdotseq 1-\varepsilon$ が成り立つ。

このように，原子が放射する光のスペクトル線が，磁場をかけることによって，何本かのスペクトル線に分裂する現象をゼーマン効果という。

(C) 気体 A を閉じ込めた容器に細い穴を開け，エネルギー準位 E_1 にある原子 A を真空中に飛び出させる。以下では，原子 A が飛び出した z 軸方向の直線運動だけを考える。ここで，図 3 のように，レーザー光源 L から波長 λ_{L} ($> \lambda_{\mathrm{A}}$) のレーザー光を z 軸の負の向きに放射する。z 軸上に静止している原子 A はこのレーザー光を吸収しないが，速度 v_0 で飛び出した原子 A は，このレーザー光を吸収してエネルギー準位 E_2 に励起され，速度が v になる。その理由は，原子 A から見たレーザー光の波長がドップラー効果のために λ_{L} からずれ，吸収できる波長 λ_{A} になるからである。

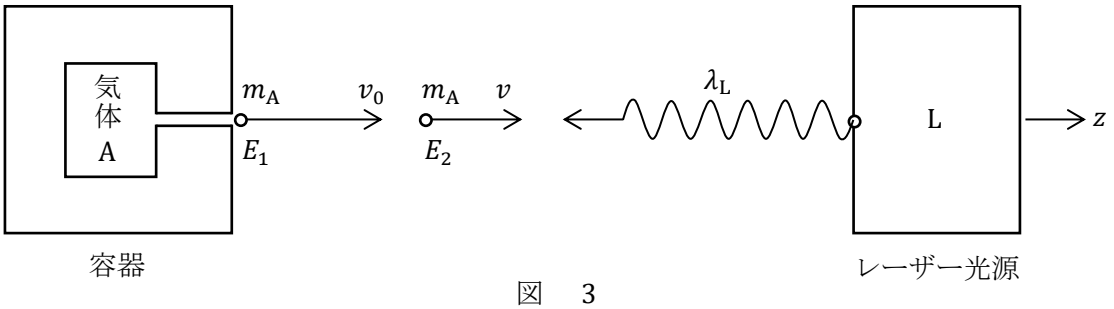

図　3

問 4　光のドップラー効果は音のドップラー効果と同じ式に従うとして v_0 を求め，λ_{L} , λ_{A} , c を用いて表せ。

問 5　z 軸上で見たとき，速度 v_0 の原子 A は波長 λ_{L} のレーザー光の光子を 1 個吸収して励起される。このことに留意して v を求め，v_0 , λ_{L} , h と原子 A の質量 m_{A} を用いて表せ。

問 6　一例として，$m_{\mathrm{A}} = 1.4 \times 10^{-25}$ kg ，$v_0 = 300$ m/s の原子 A が，$\lambda_{\mathrm{L}} = 600$ nm ($n = 10^{-9}$) のレーザー光の光子を 1 個吸収したときに，速度の減少分 $v_0 - v$ が v_0 の何倍になるかを求めよ。ただし，$h = 6.6 \times 10^{-34}$ Js である。この数値はルビジウム原子のものに近い。

この一例が示すように，1 個の光子を吸収したときの原子 A の速度変化はほんのわずかであるし，原子 A から見たレーザー光の波長が λ_{A} から少しずれていても，原子 A はその光子を吸収することができるので，速度の減少が大きくなってレーザー光を吸収できなくなるまで，原子 A は多数の光子を吸収する。

レーザー光を吸収してエネルギー準位 E_2 に励起された原子 A は，すぐに光子を 1 個放出してもとのエネルギー準位 E_1 に戻る。その光子はどの方向にも同じ確率で放出されるので，多数回の光子放出で平均すれば，z 軸方向の速度変化に対する光子放出の影響は無視できる。ある光子放出によって原子 A が $+z$ 方向に反跳 (キック) を受ければ，別の光子放出によって $-z$ 方向に反跳を受けるからである。

しかしながら，光子を吸収しなくなると，もうそれ以上原子 A を減速することはできなくなる。そこで，z 軸方向に非一様な磁場をかけることによって，原子 A の励起エネルギーを $E_2 - E_1$ から $E_2 - E_1 - \Delta E$ に下げ，レーザー光を吸収できるようにすると，また原子 A は減速される。これをくり返すと，原子 A の速度は 0 に近づく。

(D) 図 4 のように，仮に磁場中の原子 A が，波長 λ_{L} のレーザー光を連続的に吸収することによって一定の加速度で減速され，z 軸上で静止したとする。減速度の大きさを a とし，容器から飛び出す位置を $z = 0$ とする。容器からはいろいろな速度で原子 A が飛び出してくるが，ここでは速度 v_0 で飛び出すものに着目する。この原子が位置 z に達して，速度が v_z ($v_z > 0$) になったとする。

問 7 v_z を v_0 , a , z で表せ。

位置 z での磁束密度を $B(z)$ とすれば，位置 z にある原子 A の分裂したエネルギー準位の間隔 $\Delta E(z)$ は，式 (3) より，

$$\Delta E(z) = \mu_{\mathrm{B}}\, B(z) \tag{4}$$

と表せる。

問 8 位置 z で速度 v_z となった原子 A が波長 λ_{L} のレーザー光を吸収する条件から $B(z)$ を求め，h , μ_{B} , λ_{L} , v_0 , a , z を用いて表せ。

問 9 z 軸方向に，問 8 で求めた磁束密度 $B(z)$ の磁場があるとき，容器から飛び出す原子 A の速度が v_0 より大きい場合と小さい場合の 2 つに分け，それぞれの場合について，原子 A が減速されて速度 0 に近づくかどうかを，理由を付して述べよ。

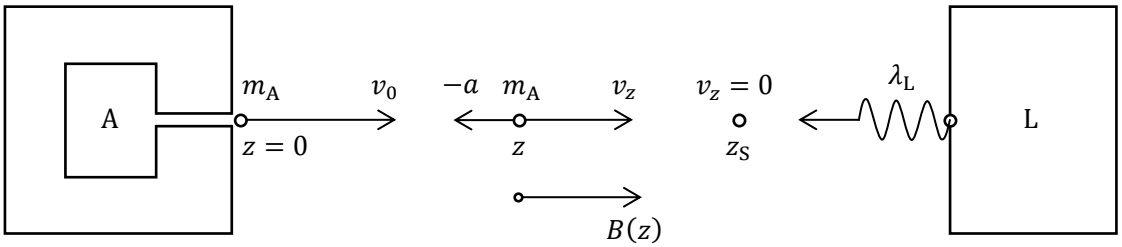

図 4

問題 12 の解答と解説

(A) 問 1　図 I のように，N 極と S 極に磁気力を打ち消す外力 $\vec{f}$ と $-\vec{f}$ をおよぼして，$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ から θ まで磁石をゆっくり回転させたときに，これらの外力がする仕事の和が求める位置エネルギー $U(\theta)$ になる。N 極にはたらく外力 $\vec{f} = -q_{\mathrm{m}}\vec{H}$ がする仕事は，対称性より，S 極にはたらく外力 $-\vec{f} = q_{\mathrm{m}}\vec{H}$ がする仕事に等しいことに注意すれば，次式を得る。

$$
\begin{aligned}
U(\theta) &= 2\int_{\pi/2}^{\theta} |\vec{f}|\,\sin\theta\,\frac{|\vec{\ell}|}{2}\,\mathrm{d}\,\theta \\
&= q_{\mathrm{m}}\,|\vec{H}||\vec{\ell}|\int_{\pi/2}^{\theta}\sin\theta\ \mathrm{d}\,\theta \\
&= -\,q_{\mathrm{m}}\,|\vec{\ell}||\vec{H}|\,\cos\theta \\
&= -\,q_{\mathrm{m}}\,\vec{\ell}\cdot\vec{H}
\end{aligned}
$$

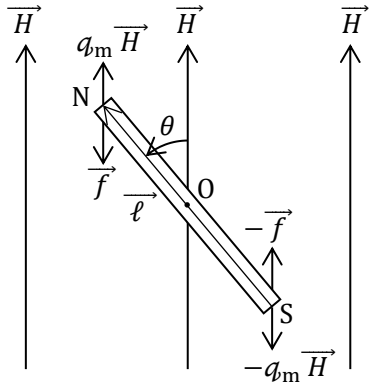

図　I

(B) 問 2　ボーアの振動数条件：$E_2 - E_1 = h\,c/\lambda_{\mathrm{A}}$ より，

$$\lambda_{\mathrm{A}} = \boxed{\frac{h\,c}{E_2 - E_1}} \qquad ①$$

問 3　磁気量子数 M の変化 ΔM が $-1\,,0\,,+1$ となる遷移は，図 II に示すように，それぞれに 3 本ある。$\Delta M = -1\,,0\,,+1$ となる遷移でのエネルギー準位の減少量と，そのときに放射される光のスペクトルは，図 II のようになる。

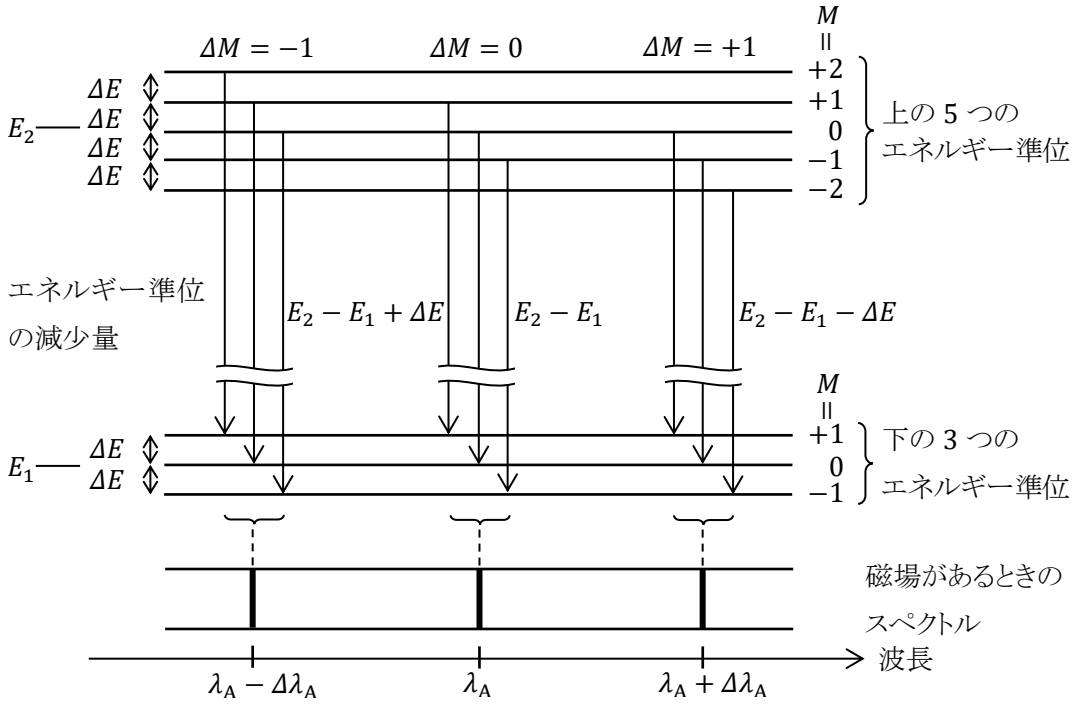

図　II

$\Delta M = \mp 1$ の遷移に対するボーアの振動数条件は,

$$E_2 - E_1 \pm \Delta E = h\,\frac{c}{\lambda_\mathrm{A} \mp \Delta\lambda_\mathrm{A}} \qquad (\text{複号同順})$$

と表される。これより $\lambda_\mathrm{A} \mp \Delta\lambda_\mathrm{A}$ を求め，式 ① を用いれば,

$$\lambda_\mathrm{A} \mp \Delta\lambda_\mathrm{A} = \frac{h\,c}{E_2 - E_1 \pm \Delta E} = \frac{h\,c}{E_2 - E_1}\left(1 \pm \frac{\Delta E}{E_2 - E_1}\right)^{-1}$$
$$\fallingdotseq \lambda_\mathrm{A}\left(1 \mp \frac{\Delta E}{E_2 - E_1}\right)$$

を得る。よって，$\Delta\lambda_\mathrm{A}$ は次のようになる。(**補注1**)

$$\boxed{\Delta\lambda_\mathrm{A} = \lambda_\mathrm{A}\frac{\Delta E}{E_2 - E_1}}$$

(C) 問 4　原子 A が速度 v_0 で光源に近づくとき，光源から放射されるレーザー光の振動数 c/λ_L と，原子 A が吸収するレーザー光の振動数 c/λ_A の間には，ドップラー効果の関係式 ：

$$\frac{c}{\lambda_\mathrm{A}} = \frac{c}{\lambda_\mathrm{L}}\,\frac{c + v_0}{c} \qquad ②$$

が成り立つ。これより v_0 を求めれば，次のようになる。

$$v_0 = \boxed{c\,\frac{\lambda_\mathrm{L} - \lambda_\mathrm{A}}{\lambda_\mathrm{A}}} \qquad ③$$

問 5　z 軸上で見たとき，レーザー光の光子の運動量は z 軸の負の向きに大きさが h/λ_L である。原子 A がレーザー光の光子を吸収するとき，全運動量が保存されるので,

$$m_\mathrm{A} v = m_\mathrm{A}\,v_0 - \frac{h}{\lambda_\mathrm{L}}$$

が成り立つ。これより v を求めれば，次のようになる。

$$v = \boxed{v_0 - \frac{h}{m_\mathrm{A}\,\lambda_\mathrm{L}}} \qquad ④$$

問 6　式 ④ より，問われている量は,

$$\frac{v_0 - v}{v_0} = \frac{h}{m_\mathrm{A}\,v_0\,\lambda_\mathrm{L}}$$

となる。これに与えられている数値を代入すれば，次のようになる。

$$\frac{h}{m_\mathrm{A}\,v_0\,\lambda_\mathrm{L}} = \frac{6.6 \times 10^{-34}\ \mathrm{Js}}{1.4 \times 10^{-25}\ \mathrm{kg} \times 300\ \mathrm{m/s} \times 600 \times 10^{-9}\ \mathrm{m}} = \boxed{2.6 \times 10^{-5}}$$

(D) 問 7　原子 A が容器から飛び出す時刻を $t = 0$ とする。時刻 t のときに位置 z に達し，速度が v_z になったとすると，加速度 $-a$ が一定であるから,

$$v_z = v_0 - a\,t\,, \qquad z = v_0\,t - \frac{1}{2}a\,t^2$$

が成り立つ。これらより t を消去して，v_z (> 0) を求めれば,

$$v_z = \boxed{\sqrt{{v_0}^2 - 2\,a\,z}} \qquad ⑤$$

となる。これをグラフで表せば，図 III のようになる。ただし，$z_S = {v_0}^2/(\,2\,a\,)$ である。

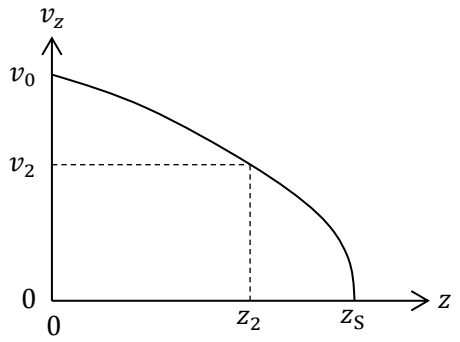

図　III

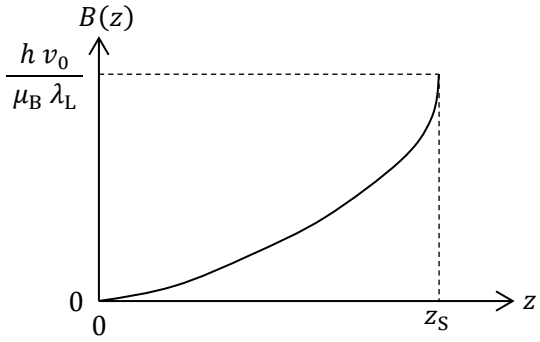

図　IV

問 8　位置 z で速度 v_z の原子 A から見たレーザー光の波長 ${\lambda_L}'$ は，ドップラー効果の関係式 ：

$$\frac{c}{{\lambda_L}'} = \frac{c}{\lambda_L}\,\frac{c+v_z}{c} \qquad ⑥$$

から求まる。このレーザー光の光子のエネルギーは，次の不等式 ：

$$h\,\frac{c}{{\lambda_L}'} = h\,\frac{c}{\lambda_L}\,\frac{c+v_z}{c} < h\,\frac{c}{\lambda_L}\,\frac{c+v_0}{c} = h\,\frac{c}{\lambda_A} = E_2 - E_1$$

を満たすので，原子 A はこの光子を吸収することができない。そこで，原子 A に磁束密度 $B(z)$ の磁場をかけることによって，励起エネルギーを $E_2 - E_1$ から ΔE だけ下げて，

$$h\,\frac{c}{{\lambda_L}'} = E_2 - E_1 - \Delta E \qquad ⑦$$

を満たすようにすれば，この光子を吸収させることができる。式 ⑦ と式 ①，式 ②，式 ⑥より，ΔE を求めれば，

$$\begin{aligned}
\Delta E &= (\,E_2 - E_1\,) - h\,\frac{c}{{\lambda_L}'} && (\text{式⑦}) \\
&= h\,\frac{c}{\lambda_A} - h\,\frac{c}{{\lambda_L}'} && (\text{式①}) \\
&= h\,\frac{c}{\lambda_L}\,\frac{c+v_0}{c} - h\,\frac{c}{\lambda_L}\,\frac{c+v_z}{c} && (\text{式②と式⑥}) \\
&= \frac{h}{\lambda_L}\,(\,v_0 - v_z\,) && ⑧
\end{aligned}$$

となる。問題文に与えられている式 (4) と式 ⑧，式 ⑤ を用いれば，

$$B(z) = \frac{\Delta E(z)}{\mu_B} = \boxed{\frac{h}{\mu_B\,\lambda_L}\left(\,v_0 - \sqrt{{v_0}^2 - 2\,a\,z}\,\right)} \qquad ⑨$$

を得る。これをグラフで表せば，図 IV のようになる。(**補注 2**) (**補注 3**)

問 9　容器から飛び出すときの速度 v_1 が v_0 より大きいときには，この原子から見たレーザー光の波長 ${\lambda_L}'$ は λ_A より短くなるので，その光子のエネルギー $h\,c/\,{\lambda_L}'$ は励起エネルギー $E_2 - E_1$ より大きい。よって，飛び出した直後の原子 A はレーザー光を吸収できない。そのため，この原子は等速度 v_1 で z 軸上を進む。その位置 z が大きくなるにつれて，原子 A の励起エネルギー

$E_2 - E_1 - \mu_B\, B(z)$ が小さくなるので，ますます吸収されにくくなり，この原子はそのまま等速度運動を続ける。したがって，速度が 0 に近づくことはない。

飛び出すときの速度 v_2 が v_0 より小さいとき，最初のうちはこの原子から見た光子のエネルギー $h\,c/\,\lambda_L{}'$ が励起エネルギーより小さいのでレーザー光は吸収されないが，やがて図 III に示されている位置 z_2 で，励起エネルギー $E_2 - E_1 - \mu_B\, B(z_2)$ が $h\,c/\,\lambda_L{}'$ と等しくなり，レーザー光の吸収が始まる。その後は，初速度 v_0 の原子 A と同様に，減速されるとレーザー光が吸収されるように励起エネルギーが小さくなるので，この原子も減速され続け，速度は 0 に近づく。

すなわち，速度 v_0 より小さい速度で飛び出した原子 A は，すべて $z = z_S$ で $v_z = 0$ となる。実際には，光子放出による乱雑な向きの反跳のために，z 軸に沿って進むにつれて，原子 A の速度分散 (平均速度からのずれの 2 乗の平均値で温度に比例する) が徐々に大きくなる。したがって，$z = z_S$ で完全に静止することはない。それでも，$z = z_S$ における速度分散は，気体 A が常温であるときの原子 A の速度分散に比べれば桁違いに小さいので，このような原子 A の集団の温度は極低温になる。(**補注 4**)

(**補注 1**)

1 本のスペクトル線が，磁場をかけることによって，等間隔の 3 本のスペクトル線に分裂する場合を，正常ゼーマン効果という。このようになったのは，ランデの g 因子が準位 E_1 と E_2 で同じ値 1 をとると仮定したからである。

一般的に，準位 E_1と E_2で g の値が異なる場合には，等間隔でない 4 本以上のスペクトル線に分裂する。このことは，図 II で準位の間隔 ΔE が上と下の準位で異なる場合を考えれば，容易に理解することができる。これを異常ゼーマン効果という。ナトリウムの D 線で初めて発見されたゼーマン効果は異常ゼーマン効果であった。これを説明するために，電子のスピンが導入されたのである。

(**補注 2**)

式 ⑨ の磁束密度：$B(z) = \dfrac{h}{\mu_B\,\lambda_L}\left(v_0 - \sqrt{{v_0}^2 - 2\,a\,z}\,\right)$ は，図 V のように，z 軸を中心軸とする多数のソレノイドコイルを積み重ねたもので実現させる。各コイルには同じ電圧をかけるが，その長さと巻き線のピッチは，式 ⑨ に最も近くなるように，理論計算で求める。

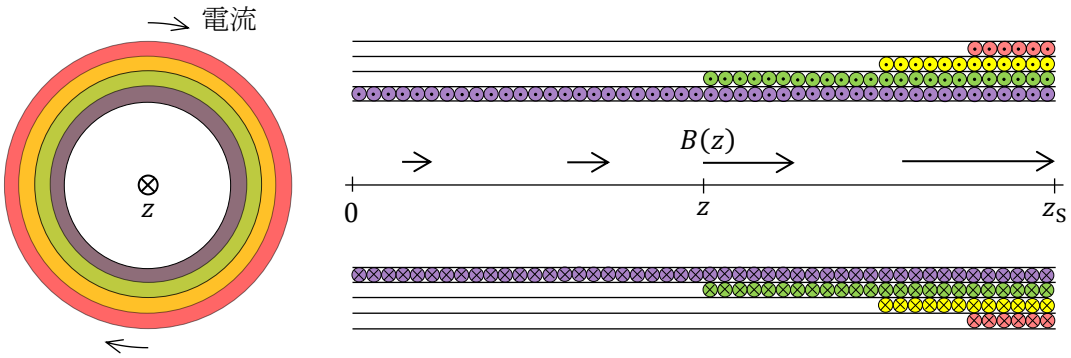

図　V

気体 A と光源 L を決めれば，λ_{A} と λ_{L} が確定し，式 ③ より v_0 が求まる。$B(z)$ の関数形を求めるために必要なもう一つの物理量 a は，気体 A とレーザー光の相互作用を量子光学によって解析しないと求まらないが，ある極限状態では，a の値を次のようにして求めることができる。

原子 A が 1 個の光子を吸収すると，その運動量 $m_{\mathrm{A}}\, v_z$ が h/λ_{L} だけ減少するから，微小時間 Δt の間の運動量変化は，

$$\Delta\,(\,m_{\mathrm{A}}\, v_z\,) = -n\,\Delta t\,\frac{h}{\lambda_{\mathrm{L}}}$$

と表される。ここに，n は原子 A が吸収する単位時間あたりの光子数である。これより減速度の大きさは次のようになる。

$$a = -\,\frac{\Delta v_z}{\Delta t} = \frac{n\,h}{m_{\mathrm{A}}\,\lambda_{\mathrm{L}}} \qquad ⑩$$

次に，原子 A が準位 E_2 に留まれる平均時間，換言すれば，準位 E_2 にある原子 A の寿命を τ とする。いまもしレーザー光の強度が大きく，時間 τ の間に準位 E_2 から E_1 へ遷移した原子A が，直ちに時間 τ の間に光子を吸収してもとの準位 E_2 に戻るとすれば，すなわち，光子の放出 →吸収→放出 →吸収 → ···· が連続的に起こっているとすれば，準位 E_2 にある原子A と準位 E_1 にある原子A は同数となり，1 個の原子A は時間 $2\,\tau$ の間に 1 個の光子を吸収することになる。このとき，

$$n = \frac{1}{2\,\tau}$$

となる。これを式 ⑩ に代入すれば，

$$a = \frac{h}{2\,\tau\, m_{\mathrm{A}}\,\lambda_{\mathrm{L}}}$$

を得る。ここでは詳しく述べないが，不確定性原理により，τ の値はスペクトル線 λ_{A} の幅から求めることができる。

ここで想定している準位 E_2 から E_1 への遷移は，問題文の (C) の最後に述べられている光子の等方的な放出を伴う遷移であり，自然放出 (spontaneous emission) と呼ばれる。光子の放出にはもう一つあって，励起状態にある原子A に入射した波長 λ_{L} のレーザー光が刺激となって基底状態に遷移し，波長 λ_{L} の光子を放出する。その向きは刺激したレーザー光が伝わる向き，すなわち，z 軸の負の向きである。よって，原子A はそれとは逆の向きに反跳を受ける。このような光子放出を誘導放出 (stimulated emission) という。結局，原子A はレーザー光を吸収するときと誘導放出するときに，逆向きで大きさが等しい運動量変化を受けるので，このような光子の吸収・放出は原子A の減速に影響しない。

(補注 3)

この問題では，λ_{A} と λ_{L} ($>\lambda_{\mathrm{A}}$) を独立に与えて，式 ③ から等減速度運動の初速度 v_0 を決定した。問 9 で論じるように，この速度は容器から飛び出した原子A が減速されるかされないかの境目の速度である。この速度は次のようにすれば任意に与えることができる。まず，$\lambda_{\mathrm{L}} = \lambda_{\mathrm{A}}$ のレーザー光源を採用する。すなわち，静止している原子Aがレーザー光を吸収できるようにする。次に，初速度 v_0 を適当に与えて，加速度 $-a$ で減速させたとする。そして位置 z で速度が v_z になったときに，z

軸方向の磁束密度 $B(z)$ の磁場によって，励起エネルギーを $E_2 - E_1 + \Delta E$ にする。これは図 II の $\Delta M = -1$ の遷移に当たる。このとき，原子A から見たレーザー光の光子のエネルギーが

$$h\ \frac{c}{\lambda_{\mathrm{L}}}\ \frac{c + v_z}{c} = E_2 - E_1 + \Delta E$$

を満たすように $B(z)$ を決める。$\lambda_{\mathrm{L}} = \lambda_{\mathrm{A}}$，$E_2 - E_1 = h\,c/\lambda_{\mathrm{A}}$ であるから，この式より，

$$B(z) = \frac{\Delta E(z)}{\mu_{\mathrm{B}}} = \frac{h}{\mu_{\mathrm{B}}\,\lambda_{\mathrm{L}}} v_z\ = \frac{h}{\mu_{\mathrm{B}}\,\lambda_{\mathrm{L}}}\sqrt{{v_0}^2 - 2\,a\,z}$$

を得る。すなわち，$B(z)$ と $v_z(z)$ の関数形を同じにすればよいことが分かる。

(補注 4)

このようにして得られた極低温の気体を狭い領域に保持するためには，特殊な形をした四重極磁場とその領域に向かう 6 本の直交した円偏光レーザーを用いる。また，保持した状態で気体の温度をさらに下げて絶対零度に近づける方法も開発されている。これらについて高校生に説明するのは困難なので，専門書か大学での講義に委ねる。

(余談)

ゼーマン効果は高校物理の範囲外であるから，ゼーマン効果を用いた気体のドップラー冷却が大学入試に出題されることは，まずないと思われる。

しかしながら，問題文の最初に書いてあるように，現在の極低温物理学にとって，レーザー冷却は欠かすことができない技術となっているので，この分野の研究者のなかには，入試問題の作成を依頼されたときに，出題の誘惑を感じる人がいるかもしれない。

実際，大阪大学 平成 12 年度 一般選抜前期日程 理科（物理）[1] の問題がドップラー冷却の原理を扱っている。ただし，ゼーマン効果を用いる方法ではなく，光子の弾性散乱によるドップラー冷却を定性的に考察している。参考のために，その問題の後半部分を以下に書き写す。

「実際の気体中を飛び回っている原子にはあらゆる方向の速度成分があるので，上記の散乱が起こったとき，運動エネルギーが増える原子もあれば減るものもある。しかし，「光の散乱の起こりやすさはその振動数に依存し，原子に固有なある振動数 ν_{A} に近いほどよく散乱される」ことを利用すると，原子気体全体として運動エネルギーが減るような散乱をより多く起こさせることが可能になる。つまり光のドップラー効果を考えると，原子から見た光の振動数は，原子が光の進行方向と逆向きに動く場合は，より ⑪ 振動数に，また光と同じ向きに動く場合は，より ⑫ 振動数に見える。そこで静止した原子の固有振動数 ν_{A} より ⑬ 振動数の光を選んで，いろいろな方向から気体に照射すると，各原子はその運動エネルギーを減らすような散乱を，より頻繁に受けて気体全体が冷却されることになる。」

「上記の散乱」とは，気体の単原子による単色可視光の 1 次元弾性散乱のことである。

筆者の解答は，⑪は 大きい，⑫は 小さい，⑬は 小さい，である。大学入試問題としては，これが限度かもしれない。