問題 10　逆カルノーサイクルによるヒートポンプ

(A) 気体の圧力 p と体積 V を図 1 の経路に沿ってゆっくり変化させる。A → B と C → D は等温変化で，B → C と D → A は断熱変化である。このような循環過程をカルノーサイクルという。

物質量 n の理想気体 G が図 1 のサイクル変化をしたとする。一定温度 T_0 のもとに体積が，V_1 から V_2 まで変化すると，気体 G が外部にする仕事 W_{12} は，

$$W_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p\,(V)\ \mathrm{d}\,V = n\,R\,T_0 \int_{V_1}^{V_2} \frac{\mathrm{d}\,V}{V} = n\,R\,T_0 \log \frac{V_2}{V_1}$$

となる。ここに，R は気体定数である。$W_{12} < 0$ のときは，気体 G は外部から $|\,W_{12}\,|$ の仕事をされる。

気体 G が断熱変化をすれば，その圧力 p，体積 V，温度 T の間に，

$$p\,V^{\gamma} = \text{一定}\ ,\qquad T\,V^{\gamma-1} = \text{一定}$$

が成り立つ。ここに，γ は比熱比 C_{p}（定圧モル比熱）/ C_{V}（定積モル比熱）である。

問1　等温膨張 A → B において気体 G が温度 T_{H} の熱源と接触して吸収する熱量 Q_{H} と，等温圧縮 C → D において気体 G が温度 T_{L} の熱源と接触して放出する熱量 Q_{L} を求め，n，R，T_{H}，T_{L}，V_{A}，V_{B}，V_{C}，V_{D} から必要なものを用いて表せ。

問2　気体 G が図 1 のサイクル変化をすることによって作動する熱機関の熱効率 η_{C} を Q_{H} と Q_{L} で表せ。

問3　V_{A}，V_{B}，V_{C}，V_{D} の間に成り立つ関係式を求めよ。

問4　η_{C} を T_{H} と T_{L} で表せ。

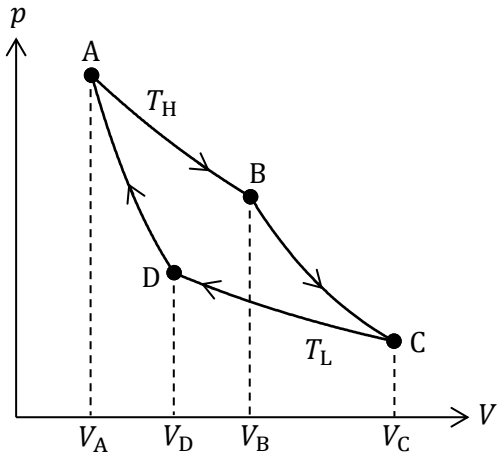

図 1　　カルノーサイクル

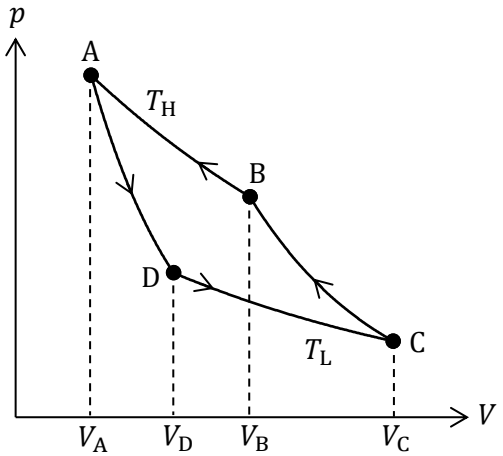

図 2　　逆カルノーサイクル

(B) 状態変数がゆっくり変化する準静的過程は逆行可能である。図 2 は図 1 のカルノーサイクルを逆行させたもので，逆カルノーサイクルという。

いま，理想気体 G が逆カルノーサイクルに沿って一巡したとする。等温膨張 D → C のときに，気体 G は温度 T_{L} の熱源と接触して熱量 Q_{L} を吸収し，等温圧縮 B → A のときに，温度 T_{H} の熱源と接触して熱量 Q_{H} を放出する。すなわち，気体 G は外部からされた正味 W の仕事を熱に変え，それを低温熱源で吸収した熱に付け加えて，高温熱源に放出しているのである。水を低いところから高いところへ汲み上げる揚水ポンプに似たところがあるので，このような熱移動を起こさせる装置をヒートポンプと呼んでいる。

低温熱源を屋外の空気あるいは地下の深い地層とし，高温熱源を屋内の空気とすれば，上記のヒートポンプは暖房機になる。暖房機の性能を表す指標として，

$$COP_{\mathrm{C}}\,(\text{暖}) = \frac{Q_{\mathrm{H}}}{W}$$

で定義される成績係数 (Coefficient Of Performance) が使われている。

問5　逆カルノーサイクルを用いた暖房機の成績係数を T_{H} と T_{L} で表せ。

これからわかるように，成績係数の値は暖房機が使用されている環境によって変わってくる。

問6　屋内の気温が 27 ℃ で，屋外の気温が −3 ℃ のとき，屋内の空気と屋外の空気の間で作動させる逆カルノーサイクル暖房機の成績係数はいくらになるか。

また，低温熱源を屋外の空気から地下の 12 ℃ の地層に代えれば，成績係数はいくらになるか。

次に，真夏に使用されるエアコンについて考える。低温熱源を屋内の涼しい空気とし，高温熱源を屋外の暑い空気とすれば，上記のヒートポンプは冷房機になる。冷房機の成績係数は，

$$COP_{\mathrm{C}}\,(\text{冷}) = \frac{Q_{\mathrm{L}}}{W}$$

で定義される。

問7　屋内の気温が 27 ℃ で，屋外の気温が 37 ℃ であれば，逆カルノーサイクル冷房機の成績係数はいくらになるか。

問題 10 の解答と解説

カルノーサイクルは，熱機関の熱効率について研究をしていた N.L.S.Carnot が理論的に考え出したサイクル変化である。カルノーサイクルで作動する熱機関 (カルノー機関) は，その後の熱力学の理論的発展に重要な役割を果たした。カルノーサイクルは単純なサイクル変化であるので，この演習問題のように，エンジンやヒートポンプの原理を説明するのに適している。

(A) 問 1　過程 A → B は等温変化であるから，内部エネルギーの変化 ΔU_{AB} は 0 である。よって，熱力学第 1 法則より，

$$Q_{\mathrm{H}} = \Delta U_{\mathrm{AB}} + W_{\mathrm{AB}} = \boxed{n\,R\,T_{\mathrm{H}}\,\log\frac{V_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{A}}}} \tag{1}$$

を得る。同様に，過程 C → D に対して，

$$Q_{\mathrm{L}} = |\,\Delta U_{\mathrm{CD}} + W_{\mathrm{CD}}\,| = \left|\,n\,R\,T_{\mathrm{L}}\,\log\frac{V_{\mathrm{D}}}{V_{\mathrm{C}}}\right| = \boxed{n\,R\,T_{\mathrm{L}}\,\log\frac{V_{\mathrm{C}}}{V_{\mathrm{D}}}} \tag{2}$$

を得る。

問 2　1 サイクル A → B → C → D → A の間に気体 G が外部にする正味の仕事を W とすれば，1サイクルに対する熱力学第 1 法則は，

$$Q_{\mathrm{H}} - Q_{\mathrm{L}} = \Delta U_{\mathrm{ABCDA}} + W = 0 + W \tag{3}$$

と表される。これを用いれば，問われている熱効率は，

$$\eta_{\mathrm{C}} = \frac{W}{Q_{\mathrm{H}}} = \boxed{1 - \frac{Q_{\mathrm{L}}}{Q_{\mathrm{H}}}} \tag{4}$$

となる。

問 3　断熱変化 B → C と D → A に対して，

$$T_{\mathrm{H}}\,V_{\mathrm{B}}^{\gamma-1} = T_{\mathrm{L}}\,V_{\mathrm{C}}^{\gamma-1} \quad と \quad T_{\mathrm{L}}\,V_{\mathrm{D}}^{\gamma-1} = T_{\mathrm{H}}\,V_{\mathrm{A}}^{\gamma-1}$$

が成り立つ。これらより，

$$\frac{T_{\mathrm{L}}}{T_{\mathrm{H}}} = \left(\frac{V_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{C}}}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_{\mathrm{A}}}{V_{\mathrm{D}}}\right)^{\gamma-1}, \quad ゆえに, \quad \boxed{\frac{V_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{A}}} = \frac{V_{\mathrm{C}}}{V_{\mathrm{D}}}} \tag{5}$$

を得る。

問 4　式 (1) , (2) と式 (5) より，

$$\frac{Q_{\mathrm{L}}}{Q_{\mathrm{H}}} = \frac{T_{\mathrm{L}}}{T_{\mathrm{H}}} \tag{6}$$

を得る。式 (6) を式 (4) に代入すれば，

$$\eta_{\mathrm{C}} = \boxed{1 - \frac{T_{\mathrm{L}}}{T_{\mathrm{H}}}} \tag{7}$$

となる。これから分かるように，理想気体を用いたカルノー機関の熱効率は高温熱源の温度 T_{H} と低温熱源の温度 T_{L} だけに依存し，気体の構成分子には依らない。

この結論は，作業物質が理想気体でなくても，温度 T_{H} の熱源と温度 $T_{\mathrm{L}}(<T_{\mathrm{H}})$ の熱源の間ではたらく任意の可逆熱機関で成り立ち，その熱効率 η (可逆) は式 (7)の η_{C} に等しい。そして非可逆熱機関の熱効率 η (非可逆) は，η (非可逆) $<\eta_{\mathrm{C}}$ を満たす。これらが大学入試問題に出てくることはないが，興味がある人のために，あとでその証明を与える。

(補足) 式 (3) の証明は次のようにしてもよい。

過程 B → C での圧力 p は，$p\,V^{\gamma}=p_{\mathrm{B}}\,V_{\mathrm{B}}{}^{\gamma}$ より，$p=p_{\mathrm{B}}\,V_{\mathrm{B}}{}^{\gamma}\,V^{-\gamma}$ と表される。この過程で気体 G が外部にする仕事は，

$$W_{\mathrm{BC}}=\int_{V_{\mathrm{B}}}^{V_{\mathrm{C}}}p\,\mathrm{d}\,V=p_{\mathrm{B}}\,V_{\mathrm{B}}{}^{\gamma}\int_{V_{\mathrm{B}}}^{V_{\mathrm{C}}}V^{-\gamma}\,\mathrm{d}\,V=\frac{p_{\mathrm{B}}\,V_{\mathrm{B}}{}^{\gamma}}{1-\gamma}\left(V_{\mathrm{C}}^{1-\gamma}-V_{\mathrm{B}}^{1-\gamma}\right)$$

となる。$p_B\,V_{\mathrm{B}}{}^{\gamma}=p_{\mathrm{C}}\,V_{\mathrm{C}}{}^{\gamma}$ と状態方程式 $p\,V=n\,R\,T$ を用いて，これを書き換えれば，

$$\begin{aligned}W_{\mathrm{BC}}&=\frac{1}{1-\gamma}\left(p_{\mathrm{C}}\,V_{\mathrm{C}}-p_{\mathrm{B}}\,V_{\mathrm{B}}\right)=\frac{n\,R}{\gamma-1}\left(T_{\mathrm{H}}-T_{\mathrm{L}}\right)\\&=n\,C_{\mathrm{V}}\left(T_{\mathrm{H}}-T_{\mathrm{L}}\right)\end{aligned}\tag{8}$$

となる。最後の式変形では，$\gamma=\dfrac{C_{\mathrm{P}}}{C_{\mathrm{V}}}=\dfrac{C_{\mathrm{V}}+R}{C_{\mathrm{V}}}=1+\dfrac{R}{C_{\mathrm{V}}}$ を用いた。同様に，

$$W_{\mathrm{DA}}=\int_{V_{\mathrm{D}}}^{V_{\mathrm{A}}}p\,\mathrm{d}\,V=\frac{n\,R}{\gamma-1}\left(T_{\mathrm{L}}-T_{\mathrm{H}}\right)=n\,C_{\mathrm{V}}\left(T_{\mathrm{L}}-T_{\mathrm{H}}\right)\tag{9}$$

となり，$W_{\mathrm{BC}}=-W_{\mathrm{DA}}$ が成り立つ。すなわち，B → C で気体 G が外部にする仕事と D → A で気体 G が外部からされる仕事は等しい。よって，

$$W=W_{\mathrm{AB}}+W_{\mathrm{BC}}+W_{\mathrm{CD}}+W_{\mathrm{DA}}=W_{\mathrm{AB}}+W_{\mathrm{CD}}=Q_{\mathrm{H}}-Q_{\mathrm{L}}$$

となる。最後の式変形では式 (1) と式 (2) を用いた。式 (8) と(9) の導出は，過程 B → C と D → A に対して熱力学第 1 法則を用いる方が簡単である。

(B) 問5　逆カルノーサイクルによる暖房機の成績係数は，カルノー機関の熱効率 η_{C} を用いて，

$$COP_{\mathrm{C}}\left(\text{暖}\right)=\frac{Q_{\mathrm{H}}}{W}=\frac{1}{W/Q_{\mathrm{H}}}=\frac{1}{\eta_{\mathrm{C}}}$$

と表せる。これに式 (7) を代入すれば，

$$COP_{\mathrm{C}}\left(\text{暖}\right)=\boxed{\frac{T_{\mathrm{H}}}{T_{\mathrm{H}}-T_{\mathrm{L}}}}\tag{10}$$

となる。

この成績係数は，1 J の仕事によって屋内に何 J の熱量を供給できるかを表している。$\eta_{\mathrm{C}}<1$ であるので，$COP_{\mathrm{C}}\left(\text{暖}\right)>1$ となる。

問 6　熱力学に出てくる温度は，特に断らない限り，絶対温度である。高温熱源 (屋内の空気) の温度は 27 ℃ だから，$T_{\mathrm{H}} = 300\ \mathrm{K}$ で，低温熱源 (屋外の空気) の温度は -3 ℃ だから，$T_{\mathrm{H}} = 270\ \mathrm{K}$ である。よって，この暖房機の成績係数は，式 (10) より，

$$COP_{\mathrm{C}}\,(\text{暖}) = \frac{300\mathrm{K}}{300\mathrm{K} - 270\mathrm{K}} = \boxed{10}$$

となる。

抵抗線に 1 kV の電圧をかけて 1 A の電流を流せば，1 kW の電力が消費され，抵抗線から 1 秒間あたり 10^3 J のジュール熱が放出される。この電力で成績係数 10 の逆カルノーサイクル暖房機をはたらかせるとき，屋内に放出される 1 秒間あたりの熱量は，

$$Q_{\mathrm{H}} = COP_{\mathrm{C}}\,(\text{暖}) \times W = 10 \times 1\mathrm{kW} \times 1\mathrm{s} = 10^4\ \mathrm{J}$$

となる。実際の暖房機では，作業物質を圧縮するモーターでの電力損失とか配管での熱漏れなどがあるので，季節変動も考慮した平均の成績係数は 4 ~ 5 程度である。

低温熱源を地下の深い地層に代えれば，その温度は 12 ℃ だから，$T_{\mathrm{L}} = 285\ \mathrm{K}$ である。よって，この場合の成績係数は，

$$COP_{\mathrm{C}}\,(\text{暖}) = \frac{300\mathrm{K}}{300\mathrm{K} - 285\mathrm{K}} = \boxed{20}$$

となる。このように低温熱源の温度を高くすると，当然のことながら，暖房機の成績係数が大きくなり，経費節減につながる。

問 7　逆カルノーサイクル冷房機の成績係数は，次のように表される。まず，定義より，

$$COP_{\mathrm{C}}\,(\text{冷}) = \frac{Q_{\mathrm{L}}}{W} = \frac{Q_{\mathrm{L}}}{Q_{\mathrm{H}} - Q_{\mathrm{L}}} = \frac{Q_{\mathrm{L}}/Q_{\mathrm{H}}}{1 - (\,Q_{\mathrm{L}}/Q_{\mathrm{H}}\,)}$$

これに式 (6) を代入すれば，

$$COP_{\mathrm{C}}\,(\text{冷}) = \frac{T_{\mathrm{L}}/\,T_{\mathrm{H}}}{1 - (\,T_{\mathrm{L}}/\,T_{\mathrm{H}}\,)} = \frac{T_{\mathrm{L}}}{T_{\mathrm{H}} - T_{\mathrm{L}}} \tag{11}$$

となる。この成績係数は，1 J の仕事によって，屋内から何 J の熱量を取り除くことができるかを表している。これをカルノー機関の熱効率 η_{C} を用いて表せば，

$$COP_{\mathrm{C}}\,(\text{冷}) = \frac{1 - \eta_{\mathrm{C}}}{\eta_{\mathrm{C}}}$$

となる。$0 < \eta_{\mathrm{C}} < 1$ であるので，この冷房機の成績係数は正の任意の値を取り得る。

この問では，低温熱源 (屋内の空気) の温度が 300 K で，高温熱源 (屋外の空気) の温度が 310 K であるので，この冷房機の成績係数は，

$$COP_{\mathrm{C}}\,(\text{冷}) = \frac{300\mathrm{K}}{310\mathrm{K} - 300\mathrm{K}} = \boxed{30}$$

となる。

(余談)

等温変化で気体がする仕事を計算しなければならない問題を作成する人は，その計算をどう扱うべきか迷ってしまう。まともに積分計算を要求する入試問題を見たことがあるが，高校側からの苦情を恐れて，ほとんどの出題者は問題文中に計算結果を与えてしまう。

大阪市立大学の 2018 年度入試問題に，カルノー機関の熱効率 η_{C} を求めさせる問題がある。その設問の一つで，$p-V$ 図上の等温線を直線で近似して仕事を計算させているのだが，この近似でも η_{C} の正しい式 $1-\dfrac{T_{\mathrm{C}}}{T_{\mathrm{H}}}$ が得られる。しかし，これで問題を終わらせるのは気持ちが悪いのであろう，直線で近似しない場合でも，積分計算に頼らずに，ある巧妙な方法で $\dfrac{Q_{\mathrm{L}}}{Q_{\mathrm{H}}}=\dfrac{T_{\mathrm{L}}}{T_{\mathrm{H}}}$ を導き出している。そしてこれを用いて η_{C} の正しい式を再度求めさせ，問題を締めくくっている。少し数学的にすぎるきらいはあるが，なるほどと感心させられる。

逆カルノーサイクル暖房機に関する設問は，北見工業大学の 2016 年度入試問題を借用した。ただし，問題文は書き換えてある。寒い地方の大学の入試問題らしくて好感を持った。大学入試問題にヒートポンプが取り上げられることはあまりないのだが，いくつかの大学で，逆オットーサイクル (断熱膨張 → 定積吸熱 → 断熱圧縮 → 定積放熱) を用いたヒートポンプの問題が出題されている。

いずれにしても，これらのヒートポンプは理論上のもので，実際のヒートポンプは，ＨＦＣ (ハイドロフルオロカーボン) などの液体・気体の共存状態における潜熱を利用している。大学入試問題に登場させるには少し特殊すぎるためか，これを扱った入試問題は見たことがない。

（補遺）

岩手大学の 2014 年度入試問題に，逆カルノーサイクルを用いた冷凍庫の作業係数（成績係数）を求めさせる問題があるのを，最近偶然見つけた。さらに，この問題の後半では，冷媒（作業物質）の循環過程で液化と気化を伴う場合を考え，逆カルノーサイクルの場合に比べれば，作業係数が大きくなる理由を問うている。相変化に伴う潜熱が関与しているであろうことは誰でも気がつくが，それを作業係数 Q_{L}/W の増加に結びつけて 100 字以内で答えるのは少し難しい。

個人的な感想ではあるが，岩手大学は，時々，筆者が好ましいと思う物理の問題を出題する。であるのに，この問題を見落としていたのは迂闊であった。（2024/7/12）

(高校物理の範囲を越えた補足)

一定温度の二つの熱源の間ではたらく熱機関では，可逆機関の場合，作業物質に関係なく，その熱効率はすべて同じになり，二つの熱源の温度だけで決まる。非可逆機関の場合には，その熱効率は可逆機関の熱効率より小さくなる。これをカルノーの定理という。

これを証明するには，熱力学第 2 法則を持ち出さなければならない。その表し方はいくつかあるが，ここでは次のクラウジウスの表現 ：

「他になんの変化も残さずに，熱を低温から高温へ移動させることはできない」

を用いる。カルノーの定理を証明するまえに，必要な用語の定義とカルノー機関の復習をしておく。

状態 A から状態 B まで変化する過程 $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$ に対して，状態 B から状態 A に戻る過程 $\mathrm{B} \to \mathrm{A}$ が存在し，もとの状態 A に戻ったときに，外部になんの変化も残さなければ，過程 $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$ を可逆過程という。逆過程 $\mathrm{B} \to \mathrm{A}$ は過程 $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$ の経路と同じ経路を逆行するとは限らない。

可逆過程から成る熱機関を可逆 (熱) 機関という。

状態変数がゆっくり変化する過程，詳しく言えば，各瞬間において平衡状態を保ちつつ，状態変数の無限小変化を積み重ねて進行する過程を準静的過程という。準静的過程は逆行可能であるから，可逆過程である。しかし，可逆過程が準静的過程であるとは限らない。準静的でない可逆過程は存在し得る。

温度 θ_{H} と θ_{L} ($< \theta_{\mathrm{H}}$) の熱源の間ではたらくカルノー機関 C を考える。θ_{H} と θ_{L} は絶対温度とは限らない。C の作業物質は，温度 θ_{H} の熱源と接触して熱量 Q_{H} を吸収し，さらに温度 θ_{L} の熱源と接触して熱量 Q_{L} を放出することによって，外部へ正味 $W = Q_{\mathrm{H}} - Q_{\mathrm{L}}$ の仕事をする。これらはすべて準静的に行われる。この過程を図示すれば，図 I のようになる。

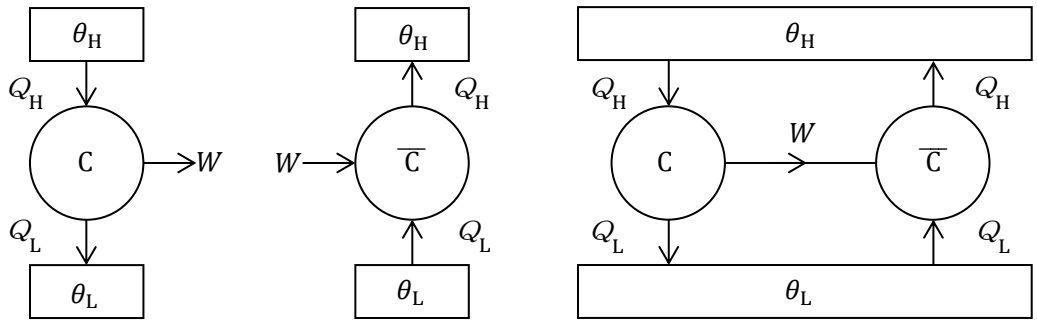

図 I カルノー機関 C　　図 II 逆カルノー機関 $\overline{\mathrm{C}}$　　図 III C と $\overline{\mathrm{C}}$ の合成機関

カルノー機関は可逆機関であるから，温度 θ_{L} の熱源から熱量 Q_{L} を吸収し，外部から正味 $W = Q_{\mathrm{H}} - Q_{\mathrm{L}}$ の仕事を受け取って，温度 θ_{H} の熱源へ熱量 Q_{H} を放出する逆カルノー機関 $\overline{\mathrm{C}}$ が存在する。この過程を図示すれば，図 II のようになる。

C と $\overline{\mathrm{C}}$ を合成して，C で取り出された仕事 W で $\overline{\mathrm{C}}$ をはたらかせれば，図 III のようになる。合成機関と二つの熱源の間に正味の熱の出入りはないし，外部との間に仕事のやりとりもない。すなわち，すべてがもとに戻る。

つぎに，温度 θ_{H} と θ_{L} の二つの熱源の間ではたらく一般的な熱機関 C' を考える。C' は可逆機関とは限らない。C' は温度 θ_{H} の熱源と接触して熱量 ${Q_{\mathrm{H}}}'$ を吸収し，さらに温度 θ_{L} の熱源と接触して熱量 ${Q_{\mathrm{L}}}'$ を放出することによって，外部へ正味 $W' = {Q_{\mathrm{H}}}' - {Q_{\mathrm{L}}}'$ の仕事をする。いま，この仕事 W' を使って 逆カルノー機関 $\overline{\mathrm{C}}$ をはたらかせたとする。その過程を図示すれば，図 IV のようになる。

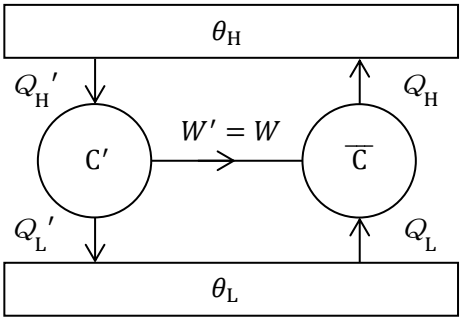

図 IV　$W' = W$ のときの
C' と $\overline{\mathrm{C}}$ の合成機関

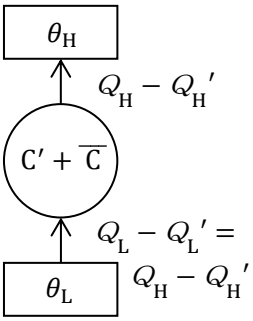

図 V　$Q_{\mathrm{H}} > Q_{\mathrm{H}}'$ の
ときの合成機関

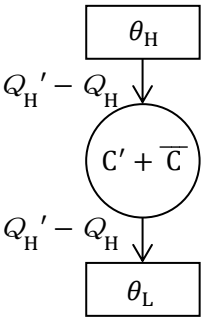

図 VI　$Q_{\mathrm{H}}' > Q_{\mathrm{H}}$ の
ときの合成機関

$\overline{\mathrm{C}}$ の作業物質が理想気体であるときに，式 (1) , (2) , (3) , (5) より導かれる W の表式 ：

$$W = n\,R\,(\,T_{\mathrm{H}} - T_{\mathrm{L}}\,)\,\log\frac{V_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{A}}}$$

からわかるように，n あるいは $V_{\mathrm{B}}/\,V_{\mathrm{A}}$ の値を調整すれば，$W = W'$ とすることができる。

このとき，

$$Q_{\mathrm{H}}' - Q_{\mathrm{L}}' = W' = W = Q_{\mathrm{H}} - Q_{\mathrm{L}}$$

が成り立つから，

$$Q_{\mathrm{H}}' - Q_{\mathrm{H}} = Q_{\mathrm{L}}' - Q_{\mathrm{L}}$$

となる。

もし，$Q_{\mathrm{H}} > Q_{\mathrm{H}}'$ であれば，$Q_{\mathrm{H}} - Q_{\mathrm{H}}' = Q_{\mathrm{L}} - Q_{\mathrm{L}}' > 0$ で，C' と $\overline{\mathrm{C}}$ の合成機関は，図 V のように書き換えられる。すなわち，この合成機関は外部との間で仕事のやりとりをすることなく，低温熱源から熱量 $Q_{\mathrm{H}} - Q_{\mathrm{H}}'$ を吸収して，それをすべて高温熱源に放出したことになる。これは熱力学第 2 法則に反する。よって，$Q_{\mathrm{H}} \leqq Q_{\mathrm{H}}'$ でなければならない。

まず，$Q_{\mathrm{H}} = Q_{\mathrm{H}}'$, $Q_{\mathrm{L}} = Q_{\mathrm{L}}'$ の場合を考える。この場合，合成機関 $\mathrm{C}' + \overline{\mathrm{C}}$ と熱源の間に正味の熱の出入りはないし，外部との間に仕事のやりとりもない。すなわち，図 III と同じ状況になる。よって，C' は可逆機関である。C' の熱効率 η' は，

$$\eta' = \frac{W'}{Q_{\mathrm{H}}'} = \frac{W}{Q_{\mathrm{H}}} = \eta_{\mathrm{C}}$$

となる。この結果は作業物質の種類によらないので，作業物質として理想気体を採用すれば，η_{C} の値は式 (7) になる。ただし，T_{H} と T_{L} は θ_{H} と θ_{L} に対応する絶対温度である。これで，

「可逆機関の熱効率はカルノー機関の熱効率に等しく，その値は二つの熱源の温度で決まる」

ことが示された。

次に，$Q_{\mathrm{H}}' > Q_{\mathrm{H}}$ の場合，$Q_{\mathrm{H}}' - Q_{\mathrm{H}} = Q_{\mathrm{L}}' - Q_{\mathrm{L}} > 0$ であるから，$\mathrm{C}' + \overline{\mathrm{C}}$ の合成機関を図示すれば，図 VI のようになる。合成機関 $\mathrm{C}' + \overline{\mathrm{C}}$ は外部との間で仕事のやりとりをすることなく，高温熱源から吸収した熱量 $Q_{\mathrm{H}}' - Q_{\mathrm{H}}$ をすべて低温熱源に放出することになる。したがって，$\mathrm{C}' + \overline{\mathrm{C}}$ は非可逆機関である。なぜなら，もし可逆機関であれば，その定義から，逆機関が存在して，外部と

仕事のやりとりをすることなく，熱量 $Q_{\mathrm{H}}{}' - Q_{\mathrm{H}}$ を低温熱源から高温熱源へ移動させることになるが，これは熱力学第 2 法則に反するからである。$\mathrm{C}' + \overline{\mathrm{C}}$ が非可逆機関で，$\overline{\mathrm{C}}$ は可逆機関であるから，C' は非可逆機関である。C' の熱効率 η' は，

$$\eta' = \frac{W'}{Q_{\mathrm{H}}{}'} = \frac{W}{Q_{\mathrm{H}}{}'} < \frac{W}{Q_{\mathrm{H}}} = \eta_{\mathrm{C}}$$

を満たす。よって，

「非可逆機関の熱効率は可逆機関の熱効率より小さい」

ことが示され，カルノーの定理が証明された。

カルノーの定理を用いれば，水のような特定の物質の状態変化に頼ることなく，一般的な物理現象に基づいて，熱力学的温度を定義することができる。この温度の単位目盛幅が 1 ℃ に等しくなるように，水の三重点の温度を 273.16 K と定義したものが絶対温度である。

また，熱力学第 2 法則を，この (**補足**) で用いた定性的な表現ではなく，定量的な表現にするには，エントロピーという状態変数が必要になる。その導入と熱力学第 2 法則との関係を論じるときに，カルノーの定理が使われる。

これらの詳細については，大学で熱力学の講義を聴いてください。

他の演習問題へ