

問題1の解説 ( 大学生向き )

本稿ではベクトル量を  $\mathbf{A}$  のように斜体の太字で表し, その大きさを  $A$  で表す。

(A) 古典電磁気学による磁気双極子モーメントの相互作用

電流が流れていない静磁場の問題では, スカラーポテンシャルの磁位  $\phi_m$  を導入する方が解きやすい。図 (i) の任意点  $Q(r, \theta)$  での磁石 1 による磁位  $\phi_{m1}$  は,

$$\phi_{m1} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{q_{m1}}{NQ} + \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{(-q_{m1})}{SQ}$$

である。 $\ell_1 \ll r$  であれば, 余弦定理と近似式を用いて,

$$\phi_{m1} \approx \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{q_{m1} \ell_1 \cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{q_{m1} \boldsymbol{\ell}_1 \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

を得る。これより点  $Q$  での磁場  $\mathbf{H}_1 = (H_{1r}, H_{1\theta})$  は,

$$H_{1r} = -\frac{\partial\phi_{m1}}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{2q_{m1} \ell_1 \cos\theta}{r^3}$$

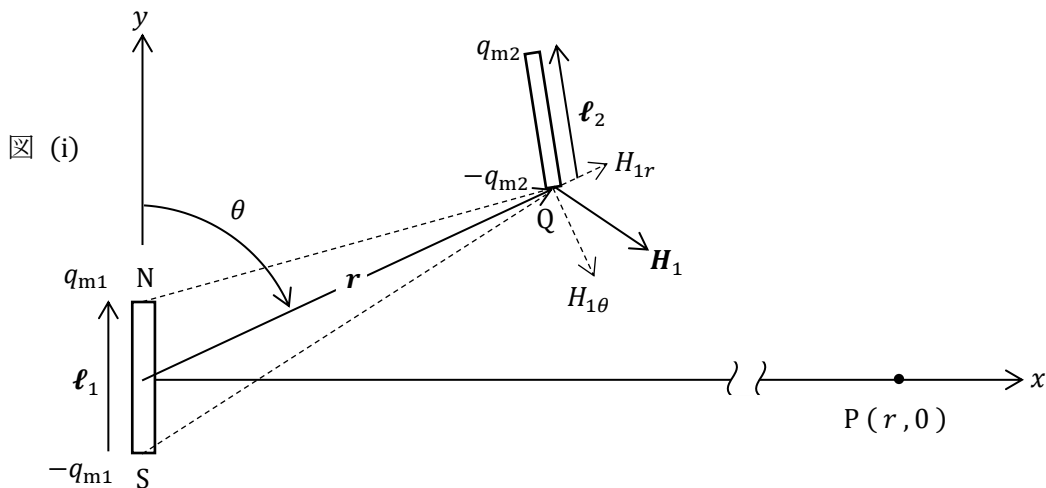
$$H_{1\theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial\phi_{m1}}{\partial\theta} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{q_{m1} \ell_1 \sin\theta}{r^3}$$

となり, ベクトルで表せば,

$$\mathbf{H}_1 = \frac{1}{4\pi\mu_0} \left\{ -\frac{q_{m1} \boldsymbol{\ell}_1}{r^3} + \frac{3(q_{m1} \boldsymbol{\ell}_1 \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5} \right\} \quad (1)$$

となる。したがって, 点  $P(r, 0)$  での磁場は次のようになる。

$$\boxed{y} \text{ 軸の } \boxed{\text{負}} \text{ の向きに大きさが } \boxed{\frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{q_{m1} \ell_1}{r^3}}$$



任意点  $Q$  にある磁石 2 (磁気双極子モーメント  $q_{m2} \boldsymbol{\ell}_2$ ) の位置エネルギー  $U$  は,

$$U = q_{m2} \phi_{m1}(\mathbf{r} + \boldsymbol{\ell}_2) + (-q_{m2}) \phi_{m1}(\mathbf{r})$$

であるから、 $\ell_2 \ll r$  のときには、

$$U \doteq q_{m2} \{ \phi_{m1}(\mathbf{r}) + (\nabla \phi_{m1}) \cdot \ell_2 \} - q_{m2} \phi_{m1}(\mathbf{r}) \\ = -q_{m2} \ell_2 \cdot \mathbf{H}_1 \quad (2)$$

となる。式を簡単にするために、磁気双極子モーメントを

$$\mathbf{p}_{mi} = q_{mi} \ell_i \quad (i = 1, 2)$$

とおけば、式(1)と(2)より、位置エネルギーは、

$$U = \frac{1}{4\pi\mu_0} \left\{ \frac{\mathbf{p}_{m2} \cdot \mathbf{p}_{m1}}{r^3} - \frac{3(\mathbf{p}_{m2} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{p}_{m1} \cdot \mathbf{r})}{r^5} \right\} \quad (3)$$

と表される。磁石 2 が点 P にあつて、 $\mathbf{p}_{m2} \perp \mathbf{r}$  であれば、その位置エネルギーは、

$$U = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{\mathbf{p}_{m2} \cdot \mathbf{p}_{m1}}{r^3} \quad (4)$$

となる。よつて、 $\mathbf{p}_{m2}$  と  $\mathbf{p}_{m1}$  が同じ向きであるときと逆向きであるときの位置エネルギーをそれぞれ  $U_{\uparrow\uparrow}$  と  $U_{\uparrow\downarrow}$  とおけば、

$$U_{\uparrow\uparrow} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{\mathbf{p}_{m2} \mathbf{p}_{m1}}{r^3}, \quad U_{\uparrow\downarrow} = -\frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{\mathbf{p}_{m2} \mathbf{p}_{m1}}{r^3}$$

となり、反転後の方が反転前より位置エネルギーは 低 くなる。その差は、

$$\Delta E = U_{\uparrow\uparrow} - U_{\uparrow\downarrow} = \frac{1}{2\pi\mu_0} \frac{\mathbf{p}_{m2} \mathbf{p}_{m1}}{r^3} \quad (5)$$

であり、反転に要する仕事は、

$$W = U_{\uparrow\downarrow} - U_{\uparrow\uparrow} = -\frac{1}{2\pi\mu_0} \frac{\mathbf{p}_{m2} \mathbf{p}_{m1}}{r^3}$$

である。

### (B-1) E-H 対応と E-B 対応

筆者の手元にある平成 25 年度版の高校物理の教科書は、国際単位系 (SI) で表した E-H 対応を採用している。SI では、電気に関するクーロンの法則の比例係数を

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \frac{c^2}{10^7} \text{ m}^3 \text{ kg s}^{-4} \text{ A}^{-2} = 8.987\,551\,79 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$$

として、真空の誘電率  $\epsilon_0$  を定義する。すなわち、

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \text{ m}^{-3} \text{ kg}^{-1} \text{ s}^4 \text{ A}^2$$

である。上式の  $c$  は真空中での光速を  $\text{m s}^{-1}$  単位で表したときの測定値:

$$c = 2.997\,924\,58 \times 10^8$$

に由来するが、SI ではこれを光速の定義値としている。真空の透磁率  $\mu_0$  は、

$(\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2} = c \text{ m s}^{-1}$  より、次の値をもつ。

$$\mu_0 = \frac{4\pi}{10^7} \text{ m kg s}^{-2} \text{ A}^{-2}$$

静磁気に関する現象を論じるとき、E-H 対応では磁荷を、E-B 対応では電流を基本的な量とする。

E-H 対応では、点磁荷  $\Delta q_m'$  が位置  $\mathbf{r}$  に作る磁場  $\Delta \mathbf{H}$  は、磁気に関するクーロンの法則に従って、

$$\Delta \mathbf{H} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{\Delta q_m' \mathbf{r}}{r^3}$$

で与えられるとする。実際の磁場  $\mathbf{H}$  はすべての点磁荷からの寄与を重ね合わせたものである。その磁場  $\mathbf{H}$  が点磁荷  $\Delta q_m$  におよぼす磁気力  $\Delta \mathbf{F}$  は、

$$\Delta \mathbf{F} = \Delta q_m \mathbf{H}$$

である。一方 E-B 対応では、電流素片  $I' \Delta \ell'$  が位置  $\mathbf{r}$  に作る磁場  $\Delta \mathbf{B}$  は、ビオ・サヴァールの法則に従って、

$$\Delta \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I' \Delta \ell' \times \mathbf{r}}{r^3}$$

で与えられるとする。実際の磁場  $\mathbf{B}$  はすべての電流素片からの寄与を重ね合わせたものである。その磁場  $\mathbf{B}$  が電流素片  $I \Delta \ell$  におよぼす磁気力  $\Delta \mathbf{F}$  は、

$$\Delta \mathbf{F} = I \Delta \ell \times \mathbf{B}$$

である。

単極子 (モノポール) は発見されていないので、磁荷は磁気双極子モーメントの構成要素として現れる。ここでは磁気 4 極子 (8 極子...) モーメントについては考えない。静磁気について論じるとき、E-H 対応ではすべての物質は磁気双極子モーメント  $\mathbf{p}_m = q_m \Delta \ell$  の微小な磁気双極子の集合体であると見なす。それに対して E-B 対応ではすべての物質は微小な閉曲線電流の集合体であると見なす。その電流  $I$  による磁気モーメント  $\mathbf{m}$  は、閉曲線で囲まれた面積を  $\Delta S$ 、右手の法則に従ってその単位法線ベクトルを  $\mathbf{n}$  としたとき、

$$\mathbf{m} = I \Delta S \mathbf{n}$$

で定義される。「微小」とは、 $\Delta \ell, \sqrt{\Delta S} \ll r$  のことである。磁気双極子モーメントと磁気モーメントという用語を区別しない人もいるが、ここでは E-H 対応と E-B 対応で使い分ける。

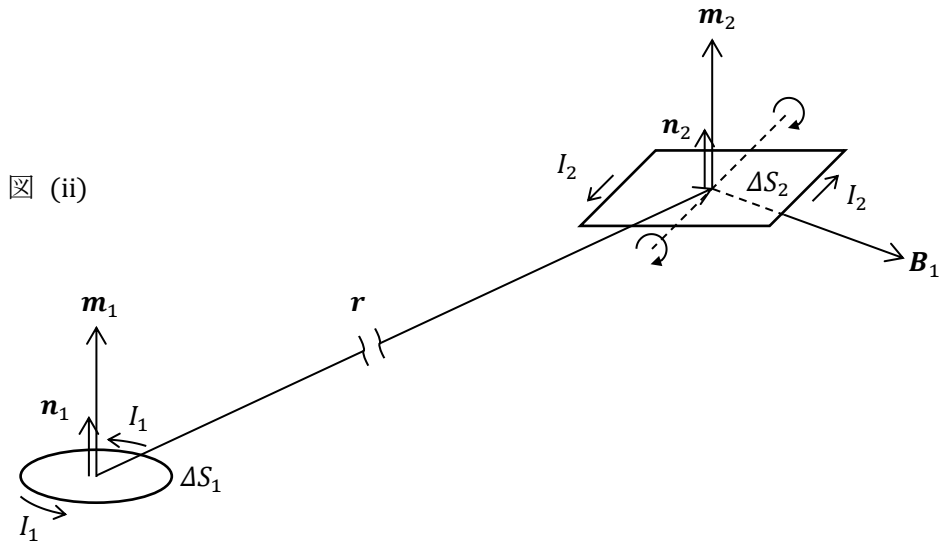
図 (ii) のように、磁気モーメント  $\mathbf{m}_1$  の微小な閉曲線電流が位置  $\mathbf{r}$  に作る磁場  $\mathbf{B}_1$  は、

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ -\frac{\mathbf{m}_1}{r^3} + \frac{3(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5} \right\} \quad (6)$$

と表される。その証明は省略するが、簡単に言えば、閉曲線電流  $I_1$  によるベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}_1(\mathbf{r})$  を求め、それに対して  $\mathbf{B}_1 = \text{rot } \mathbf{A}_1$  を計算すればよい。閉曲線が微小でありさえすれば、 $\mathbf{B}_1$  はその形に依らない。この  $\mathbf{B}_1$  の位置に磁気モーメント  $\mathbf{m}_2$  の微小な閉曲線電流があれば、その位置エネルギーは、

$$U = -\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{B}_1 \quad (7)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{m}_1}{r^3} - \frac{3(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{r})}{r^5} \right\} \quad (8)$$



となる。式 (7) の証明は、磁場  $B_1$  のなかで、電流  $I_2$  が流れる面積  $\Delta S_2$  の方形回路をその対称軸のまわりに回転させるときに外力がする仕事を計算し、その結果を  $m_2 (= I_2 \Delta S_2 n_2)$  を用いて表せばよい。付加定数は 0 とする。回路が微小でありさえすれば、 $U$  はその形に依らない。ただし、 $m_1$  と  $m_2$  は一定で、微小回路の移動や回転によって  $I_1, I_2$  が変化することはないとする。式 (6) と式 (7) の証明の一例は「ファインマン物理学 III」にある。

式 (3) と式 (8) を比べれば、

$$p_{mi} = \mu_0 m_i \quad (i = 1, 2)$$

である場合に、2 つの位置エネルギーは一致する。

まとめとして、静磁場と静電場と定常電流の場合について、E-H 対応と E-B 対応を比較すると表 I のようになる。各物理量の SI 単位を [ ] 内に与えておく。単位を表すときには ( ) を用いないのが原則であるが、対応をわかりやすくするために、敢えて ( ) を用いた。

表 I E-H 対応と E-B 対応の比較

磁気	E-H 対応	電気	E-B 対応	磁気
磁荷 $q_m$ [Wb]	$\longleftrightarrow$	電荷 $q_e$ [C]	$\longleftrightarrow$	電流素片 $I \Delta \ell$ [Am]
$\mu_0$ [ $N^{-1} Wb^2 m^{-2}$ ]	$\longleftrightarrow$	$\epsilon_0$ [ $N^{-1} C^2 m^{-2}$ ]	$\longleftrightarrow$	$\mu_0^{-1}$ [ $N^{-1} (Am)^2 m^{-2}$ ]
磁場 $H$ [ $N Wb^{-1}$ ]	$\longleftrightarrow$	電場 $E$ [ $N C^{-1}$ ]	$\longleftrightarrow$	磁場 $B$ [ $N (Am)^{-1}$ ]
磁位 $\phi_m$ [ $J Wb^{-1}$ ]	$\longleftrightarrow$	電位 $\phi_e$ [ $J C^{-1}$ ]	$\longleftrightarrow$	ベクトルポテンシャル $A$ [ $J (Am)^{-1}$ ]
磁気双極子モーメント $p_m$ [Wb m]	$\longleftrightarrow$	電気双極子モーメント $p_e$ [C m]	$\longleftrightarrow$	磁気モーメント $m$ [(Am) m]

問題 1 は高校物理の教科書に準拠しているので、E - H 対応を採用して作問したが、現在の大学生用の教科書では E - B 対応を採用するものが主流で、「理科年表」のような物理定数表も E - B 対応の数値を載せている。電子や原子核のスピ角運動量によるものも含めた原子や分子の磁気双極子モーメントを  $\mu$  (EH), 磁気モーメントを  $\mu$  (EB) とすると、

$$\mu \text{ (EH)} = \mu_0 \mu \text{ (EB)} \quad (9)$$

の関係がある。問題 1 に与えてある  $\mu_e$  と  $\mu_p$  の値は、「理科年表」に載っている磁気モーメントの値と式 (9) から求めた磁気双極子モーメントの値である。

### (B - 2) 量子力学による磁気モーメントの相互作用

原子核の磁気モーメント  $\mu_1$  と電子の磁気モーメント  $\mu_e$  の相互作用は、

$$A = -\frac{2}{3} \mu_0 \langle \mu_1 \cdot \mu_e \rangle |\psi(0)|^2 \quad (10)$$

と表される。これをフェルミ接触相互作用という。ここに、 $\langle \quad \rangle$  は期待値を表し、 $\psi(0)$  は原子核の位置における電子の波動関数の値である。これからわかるように、電子が原子核の中に入り込んだときに双方の磁気モーメントの相互作用が生じるので、接触という言葉が使われている。

原子核と電子のスピ角運動量をそれぞれ  $I$  と  $S$  とすれば、 $\mu_1$  と  $\mu_e$  は、

$$\mu_1 = g_1 \frac{e}{2 m_p} I \quad , \quad \mu_e = g_e \frac{-e}{2 m_e} S \quad (11)$$

と表される。ここに、 $e$  は電気素量、 $m_p$  と  $m_e$  はそれぞれ陽子と電子の質量、 $g_1$  と  $g_e$  はそれぞれ原子核と電子に固有な量で  $g$  因子という。 $g_e$  は正であるが、符号も含めた  $g_1$  の値は原子核によって異なる。

星間気体の温度は 200K 程度で極端に低いので、その主成分である水素原子は基底状態  $1s$  にある。 $s$  軌道なので、この電子は原子核 (陽子) のなかに入り込むことができる。入り込む確率密度はクーロンポテンシャルに対するシュレーディンガー方程式の解 :

$$|\psi(r)|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{r_B} \right)^{3/2} e^{-r/r_B} \right|^2 \quad (12)$$

から、

$$|\psi(0)|^2 = \frac{1}{\pi r_B^3} \quad (13)$$

となる。 $r_B$  はボーア半径である。また、電子の軌道角運動量  $L$  は  $\mathbf{0}$  であるから、 $I$  と  $S$  の和:

$$I + S \equiv F$$

は水素原子の全角運動量と見なせる。そしてこれから導かれる関係式:

$$I \cdot S = \frac{1}{2} (F^2 - I^2 - S^2) \quad (14)$$

は演算子の関係式として成り立つ。これらについてはあとで述べる。式 (10) に式 (11), (13), (14) を代入し、陽子の  $g$  因子を  $g_p$  とすれば、基底状態  $1s$  にある水素原子のフェルミ接触相互作用 (超微細構造エネルギー) は次のようになる。

$$A_H = \frac{\mu_0}{3 \pi r_B^3} \left( g_p \frac{e}{2 m_p} \right) \left( g_e \frac{e}{2 m_e} \right) \langle F^2 - I^2 - S^2 \rangle \quad (15)$$

一般的に、2つの独立な角運動量  $J_1$  と  $J_2$  の和に関して次の関係式が成り立つ。その証明は、量子力学のどの教科書にも載っているので、省略する。

まず、 $J_k$  ( $k = 1, 2$ ) の演算子を  $\hat{J}_k$  で表せば、ディラック定数を  $\hbar$  として、交換関係：

$$\hat{J}_k \times \hat{J}_k = i \hbar \hat{J}_k \quad (k = 1, 2)$$

が成り立つ。また、ある方向、たとえば  $z$  方向の  $J_k$  の成分を  $J_{kz}$  とすれば、 $\hat{J}_k^2$  と  $\hat{J}_{kz}$  は可換で、

$$[\hat{J}_k^2, \hat{J}_{kz}] = 0$$

を満たす。したがって、 $\hat{J}_k^2$  と  $\hat{J}_{kz}$  が同時に確定値をもつ状態が存在し、その固有関数を  $\psi_k(j_k, m_k)$  とすれば、

$$\hat{J}_k^2 \psi_k(j_k, m_k) = j_k(j_k + 1) \hbar^2 \psi_k(j_k, m_k) \quad (16)$$

$$\hat{J}_{kz} \psi_k(j_k, m_k) = m_k \hbar \psi_k(j_k, m_k) \quad (17)$$

が成り立つ。ただし、量子数  $j_k$  は非負の整数 ( $0, 1, 2, \dots$ ) または正の半整数 ( $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$ ) であり、

$j_k$  が定まっているとき、量子数  $m_k$  は、

$$m_k = j_k, j_k - 1, \dots, -(j_k - 1), -j_k$$

のいずれかの値をとる。すなわち、状態  $\psi_k(j_k, m_k)$  は  $(2j_k + 1)$  重に縮退している。

$\hat{J}_1$  と  $\hat{J}_2$  が独立であるとき、 $\hat{J}_1$  と  $\hat{J}_2$  は可換、すなわち、 $\mu, \nu = x, y, z$  として、

$$[\hat{J}_{1\mu}, \hat{J}_{2\nu}] = 0$$

を満たし、 $J_1$  と  $J_2$  のベクトルの和  $J_1 + J_2 \equiv J$  に対して、

$$\hat{J} \times \hat{J} = i \hbar \hat{J}$$

が成り立つ。したがって  $J$  は角運動量であり、 $J_k$  の場合と同様に、次の固有方程式を満たす。

$$\hat{J}^2 \psi(j, m) = j(j + 1) \hbar^2 \psi(j, m) \quad (18)$$

$$\hat{J}_z \psi(j, m) = m \hbar \psi(j, m) \quad (19)$$

ただし、 $j_1$  と  $j_2$  が定まっているとき、量子数  $j$  が取り得る値は、

$$j = j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, \dots, |j_1 - j_2| \quad (20)$$

であり、 $j$  が定まっているとき、量子数  $m$  は、

$$m = j, j - 1, \dots, -(j - 1), -j$$

のいずれかの値をとる。

以上の関係式を、次の置き換え：

$$J_1 \rightarrow I, \quad j_1 \rightarrow I, \quad m_1 \rightarrow M_I, \quad J_2 \rightarrow S, \quad j_2 \rightarrow S, \quad m_2 \rightarrow M_S$$

$$J \rightarrow F, \quad j \rightarrow F, \quad m \rightarrow M_F$$

によって、いま考察している水素原子に適用する。

電子と陽子のスピン量子数  $S$  と  $I$  は両方とも  $\frac{1}{2}$  である。この値が確定する経緯については、朝永振一郎の「スピンはめぐる」に分かりやすい解説がある。初等量子力学とくにスペクトルの知識が

あれば理解できるので、腰を据えてじっくりと読まれることを勧めたい。著名な学者たちの裏事情も書かれていて、興味が尽きない。

つぎに、式(16)より、

$$\hat{I}^2 \text{の固有値} = I(I+1)\hbar^2, \quad \hat{S}^2 \text{の固有値} = S(S+1)\hbar^2 \quad (21)$$

となる。

$\hat{I}$  と  $\hat{S}$  は独立(可換)であるから、その和  $\hat{I} + \hat{S} = \hat{F}$  は角運動量演算子である。いまの場合  $L = 0$  であるから、 $F$  は水素原子の全角運動量となる。そして式(18)より、

$$\hat{F}^2 \text{の固有値} = F(F+1)\hbar^2 \quad (22)$$

となる。ただし、 $F$  が取り得る値は、式(20)より、

$$F = I + S = 1 \quad \text{または} \quad F = I + S - 1 = 0$$

のどちらかである。式(21)と(22)の固有値は確定値であるから、期待値でもある。よって、

$$\begin{aligned} \langle \hat{F}^2 - \hat{I}^2 - \hat{S}^2 \rangle &= \{ F(F+1) - I(I+1) - S(S+1) \} \hbar^2 \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} \hbar^2 & F = 1 \text{ のとき} \\ \frac{3}{2} \hbar^2 & F = 0 \text{ のとき} \\ -\frac{3}{2} \hbar^2 & F = 0 \text{ のとき} \end{cases} \end{aligned}$$

となる。これらを式(15)に代入すれば、

$$\begin{aligned} F = 1 \text{ のとき, } A_{H\uparrow\uparrow} &= \frac{\mu_0}{3\pi r_B^3} \left( g_p \frac{e\hbar}{2m_p} \right) \left( g_e \frac{e\hbar}{2m_e} \right) \times 4 \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{\mu_0}{3\pi r_B^3} \left( \frac{g_p}{2} \mu_N \right) \left( \frac{g_e}{2} \mu_B \right) \times 2 \\ &= \frac{2\mu_0}{3\pi r_B^3} \mu_p \mu_e \quad (23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F = 0 \text{ のとき, } A_{H\uparrow\downarrow} &= \frac{\mu_0}{3\pi r_B^3} \left( g_p \frac{e\hbar}{2m_p} \right) \left( g_e \frac{e\hbar}{2m_e} \right) \times 4 \times \left( -\frac{3}{2} \right) \\ &= -\frac{2\mu_0}{\pi r_B^3} \mu_p \mu_e \quad (24) \end{aligned}$$

となる。式(23)の2行目にある  $\mu_N$  と  $\mu_B$  はそれぞれ核磁子とボーア磁子と呼ばれ、その値は、

$$e = 1.602\,176\,634 \times 10^{-19} \text{ C} \quad (\text{定義値}),$$

$$h = 2\pi\hbar = 6.626\,070\,15 \times 10^{-34} \text{ J s} \quad (\text{定義値}),$$

$$m_p = 1.673 \times 10^{-27} \text{ kg}, \quad m_e = 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

を用いれば、

$$\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p} = 5.050 \times 10^{-27} \text{ J T}^{-1}, \quad \mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9.274 \times 10^{-24} \text{ J T}^{-1}$$

となる。さらに、 $g_p$  と  $g_e$  の測定値:

$$g_p = 5.586, \quad g_e = 2.002$$

を用いれば、陽子と電子の磁気モーメントの大きさは、

$$\mu_p = 1.410 \times 10^{-26} \text{ J T}^{-1}, \quad \mu_e = 9.283 \times 10^{-24} \text{ J T}^{-1}$$

となる。式 (23) と式 (24) から、陽子と電子のスピ角運動量が同じ向きから逆向きに遷移するとき、すなわち、磁気モーメントが逆向きから同じ向きに遷移するとき、水素原子は、

$$\Delta E = A_{H\uparrow\uparrow} - A_{H\uparrow\downarrow} = \frac{8 \mu_0 \mu_p \mu_e}{3 \pi r_B^3} \quad (25)$$

だけエネルギーを失い、このエネルギーを担った光子を放出する。上記の  $\mu_p$  と  $\mu_e$  の数値と

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ m kg s}^{-2} \text{ A}^{-2} \quad (\text{定義値}), \quad r_B = 5.292 \times 10^{-11} \text{ m}$$

を式 (25) に代入すれば、

$$\Delta E = 9.421 \times 10^{-25} \text{ J}$$

を得る。したがって、超微細構造線の波長は次のようになる。

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = 0.2109 \text{ m} \approx 21.1 \text{ cm}$$

(B-3) 古典電磁気学を基にしてフェルミ接触相互作用を導くこと

問題 1 に出てきた古典電磁気学による  $\Delta E$  の怪し気な式 (5) (高校生に対してはこれが限度) に、 $p_{m1} = \mu_0 \mu_p$ ,  $p_{m2} = \mu_0 \mu_e$  と  $r = r_B$  を代入すれば、E-B 対応での式:

$$\Delta E (\text{古典論}) = \frac{\mu_0 \mu_p \mu_e}{2 \pi r_B^3}$$

を得る。これと量子力学に基づいて求めた正しい式 (25):

$$\Delta E (\text{量子論}) = \frac{8 \mu_0 \mu_p \mu_e}{3 \pi r_B^3}$$

を比べれば、 $\Delta E (\text{量子論}) / \Delta E (\text{古典論}) = 16 / 3$  と 5 倍以上食い違う。

食い違う理由の一つは、電子が図 (iii) の点 P にあるときに点 O にある陽子と相互作用するのではなく、点 O で陽子と「接触」するときに相互作用するからである。もう一つの理由は、電子の磁気モーメントが点 P で反転するとき、古典論では反転前の位置エネルギーの 2 倍のエネルギーを失うのに対して、点 O では量子効果のために 4 倍のエネルギーを失うからである。

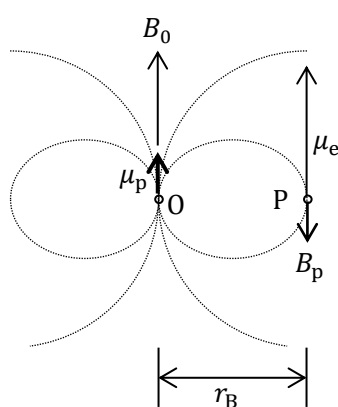


図 (iii) 陽子を作る磁場と  
陽子と電子の磁気モーメント

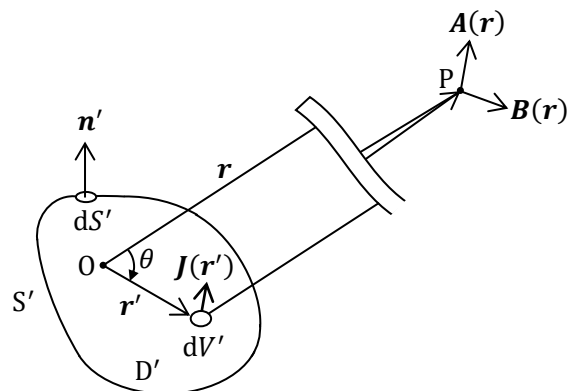


図 (iv) 領域  $D'$  内の電流密度  $J(r')$  が遠く離れた点 P 作るベクトルポテンシャル  $A(r)$  と磁場  $B(r)$



フェルミ接触相互作用は相対論的量子論から導かれるのであるが、式(10)と同じ式を古典電磁気学と初等量子論を用いて導出することができる。これを最初に指摘したのは J.D.Jackson (Classical Electrodynamics 3rd.ed.) であるが、ここでは太田浩一の「電磁気学の基礎 I」に載っているものを紹介する。と言っても書かれている数式をそのまま書き写すだけであるが、一部に記号と理由説明を変更・追加したところがある。

図(iv)の領域  $D'$  内に定常電流密度  $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$  が閉じ込められているとする。この場合、その表面  $S'$  における  $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$  の法線成分  $\mathbf{n}' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')$  は 0 である。

まず、 $D'$  内の点  $O$  から見て遠く離れた点  $P$  におけるベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  を求める。

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{D'} dV' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (\text{以下積分領域の } D' \text{ を省略する})$$

$r \gg r'$  を想定しているので、

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cong \left\{ r \left( 1 - \frac{r'}{r} \cos \theta \right) \right\}^{-1} \cong \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \cong \frac{\mu_0}{4\pi r} \int dV' \mathbf{J}(\mathbf{r}') + \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int dV' (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}')$$

第 1 項は直観的に 0 であるが、おとなしい任意のスカラー関数  $f, g$  を含む恒等式:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{S'} dS' \mathbf{n}' \cdot \{f g \mathbf{J}(\mathbf{r}')\} = \int dV' \nabla' \cdot \{f g \mathbf{J}(\mathbf{r}')\} \\ &= \int dV' \{g \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' f + f \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' g + f g \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')\} \quad \text{①} \end{aligned}$$

を用いてそれを証明する。 $\nabla'$  は  $\mathbf{r}'$  に関するナブラである。式①に、 $f = 1, g = x'_j$  と電荷保存則と定常性から導かれる  $\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') = 0$  を代入すれば、

$$0 = \int dV' J_j(\mathbf{r}') \quad \text{よって} \quad 0 = \int dV' J(\mathbf{r}')$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int dV' (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}')$$

式①に、 $f = x'_j, g = x'_i, \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') = 0$  を代入すれば、

$$0 = \int dV' \{x'_i J_j(\mathbf{r}') + x'_j J_i(\mathbf{r}')\}$$

を得る。これを用いれば、

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot \int dV' \mathbf{r}' J_i(\mathbf{r}') &= \sum_j x_j \int dV' x'_j J_i(\mathbf{r}') \\ &= - \sum_j x_j \int dV' x'_i J_j(\mathbf{r}') = - \int dV' x'_i \{ \mathbf{r} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') \} \\ \rightarrow \int dV' (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') &= - \int dV' \mathbf{r}' \{ \mathbf{r} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') \} \end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int dV' \mathbf{r}' \{ \mathbf{r} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') \} \quad (\text{以下 } \mathbf{J}(\mathbf{r}') \text{ を } \mathbf{J} \text{ と書く})$$

外積の3重積の公式:  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a}$  より,

$$\int dV' (\mathbf{r}' \times \mathbf{J}) \times \mathbf{r} = \int dV' \{ (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}) \mathbf{J} - (\mathbf{J} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}' \}$$

$$= -\int dV' \mathbf{r}' (\mathbf{r} \cdot \mathbf{J}) - \int dV' (\mathbf{J} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}' = -2 \int dV' \mathbf{r}' (\mathbf{r} \cdot \mathbf{J})$$

$$\downarrow$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left( \frac{1}{2} \int dV' \mathbf{r}' \times \mathbf{J} \right) \times \mathbf{r}$$

領域  $D'$  内の  $\mathbf{J}$  によって生じる磁気モーメント  $\mathbf{m}$  は, 定義より,

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int dV' \mathbf{r}' \times \mathbf{J}$$

$$\downarrow$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \mathbf{m} \times \mathbf{r}$$

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (\nabla \text{ は } \mathbf{r} \text{ に関するナブラ})$$

$$\downarrow$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{m} \times \left( -\nabla \frac{1}{r} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \nabla \frac{1}{r} \right) \times \mathbf{m} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \frac{\mathbf{m}}{r} \quad \textcircled{2}$$

ここで, 磁気モーメント  $\mathbf{m}$  を有限に保って, 領域  $D'$  の体積を  $0$  に近づける。すなわち, 点状の磁気モーメント  $\mathbf{m}$  を考える。このとき, 式②を用いて磁場  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  を求めると,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left( \nabla \times \frac{\mathbf{m}}{r} \right)$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}$$

$$\downarrow$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \left( \nabla \cdot \frac{\mathbf{m}}{r} \right) - \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \cdot \nabla \frac{\mathbf{m}}{r}$$

じゃまかきがらずに微分計算をすれば, 次の公式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} = 3 \frac{x_i x_j}{r^5} - \frac{\delta_{ij}}{r^3} - \frac{4\pi}{3} \delta(\mathbf{r}) \delta_{ij}$$

$$-\nabla \cdot \nabla \frac{1}{r} = -\nabla^2 \frac{1}{r} = 4\pi \delta(\mathbf{r})$$

$$\downarrow$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right\} + \frac{2\mu_0}{3} \mathbf{m} \delta(\mathbf{r}) \quad \textcircled{3}$$

式③の第1項は点状の微小領域  $D'$  内の定常電流密度  $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$  が  $D'$  の外側に作る磁場であるから, 微小閉曲線電流から遠く離れた点での磁場を表す式 (6) を含んでいる。式 (6) を導くときには, 微小閉曲線の内側については考慮していない。それを考慮すれば, 式③の第2項が現れる。

式③の磁場  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  を作る  $\mathbf{m}$  と等価な電流密度  $\mathbf{J}^M(\mathbf{r})$  をアンペールの法則から求めると,

$$\mu_0 \mathbf{J}^M(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

$\nabla$  は  $\mathbf{r}$  に関するナブラで、 $\nabla'$  は  $\mathbf{r}'$  に関するナブラであることに注意すれば、

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \nabla \cdot \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \frac{\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \nabla' \cdot \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \frac{0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} dS' \frac{\mathbf{n}' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = 0 \end{aligned}$$

$$\mu_0 \mathbf{J}^M(\mathbf{r}) = -\nabla^2 \mathbf{A}$$

式②より、

$$\begin{aligned} -\nabla^2 \mathbf{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla^2 \left( \mathbf{m} \times \nabla \frac{1}{r} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{m} \times \nabla \nabla^2 \frac{1}{r} \\ &= -\mu_0 \mathbf{m} \times \nabla \delta(\mathbf{r}) = \mu_0 \nabla \times \mathbf{m} \delta(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

$$\mathbf{J}^M(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{m} \delta(\mathbf{r})$$

位置  $\mathbf{z}$  に点状の磁気モーメント  $\mathbf{m}$  があるとき、 $\mathbf{m}$  と等価な電流密度分布  $\mathbf{J}^M(\mathbf{r})$  は、

$$\mathbf{J}^M(\mathbf{r}) = -\mathbf{m} \times \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{z})$$

と表される。このとき磁場  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  が電流密度  $\mathbf{J}^M(\mathbf{r})$  におよぼす力、すなわち、磁気モーメント  $\mathbf{m}$  におよぼす力は次のようになる。

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}) = \int dV \mathbf{J}^M(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = - \int dV \{ \mathbf{m} \times \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{z}) \} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})$$

$$= (\mathbf{m} \times \nabla_{\mathbf{z}}) \times \mathbf{B}(\mathbf{z}) \quad (\nabla_{\mathbf{z}} \text{ は } \mathbf{z} \text{ に関するナブラ})$$

$$= \nabla_{\mathbf{z}} \{ \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{z}) \} - \mathbf{m} \{ \nabla_{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{z}) \} = -\nabla_{\mathbf{z}} \{ -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{z}) \} - 0$$

$U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{z})$  とおけば、 $U$  は磁気モーメント  $\mathbf{m}$  の位置エネルギーとなる。

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}) = -\nabla_{\mathbf{z}} U$$

いま、位置  $\mathbf{z}_2$  にある点状の磁気モーメント  $\mathbf{m}_2$  が位置  $\mathbf{z}_1$  に作る磁場  $\mathbf{B}_2(\mathbf{z}_1)$  は、 $\mathbf{r} = \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2$  として、

$$\mathbf{B}_2(\mathbf{z}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ 3 \frac{(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}_2}{r^3} \right\} + \frac{2\mu_0}{3} \mathbf{m}_2 \delta(\mathbf{r})$$

であるから、 $\mathbf{z}_1$  にある点状の磁気モーメント  $\mathbf{m}_1$  の位置エネルギーは、

$$U_{12} = -\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{B}_2(\mathbf{z}_1)$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ 3 \frac{(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{r})}{r^5} - \frac{\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{m}_1}{r^3} \right\} - \frac{2\mu_0}{3} \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{m}_1 \delta(\mathbf{r})$$

となる。

ここで、 $\mathbf{m}_2$  を  $\mu_p$  に、 $\mathbf{m}_1$  を  $\mu_e$  に置き換え、 $\mu_p$  と  $\mu_e$  が同じ向きか逆向きのときに、式 (12) を用いて  $U_{12}$  の期待値を計算すると、

$$\begin{aligned}
\langle U_{12} \rangle &= \int dV U_{12}(\mathbf{r}) |\psi(\mathbf{r})|^2 \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^\infty dr \frac{|\psi(\mathbf{r})|^2}{r} \int_0^\pi (\boldsymbol{\mu}_p \cdot \boldsymbol{\mu}_e) (3 \cos^2 \theta - 1) 2\pi \sin \theta d\theta \\
&\quad - \frac{2\mu_0}{3} (\boldsymbol{\mu}_p \cdot \boldsymbol{\mu}_e) \int dV |\psi(\mathbf{r})|^2 \delta(\mathbf{r}) \\
&= 0 - \frac{2}{3} \mu_0 (\boldsymbol{\mu}_p \cdot \boldsymbol{\mu}_e) |\psi(0)|^2
\end{aligned}$$

となり、式(10)と同じ式になる。これは偶然なのか、それとも必然であるのだろうか。

### (C) 光のドップラー効果

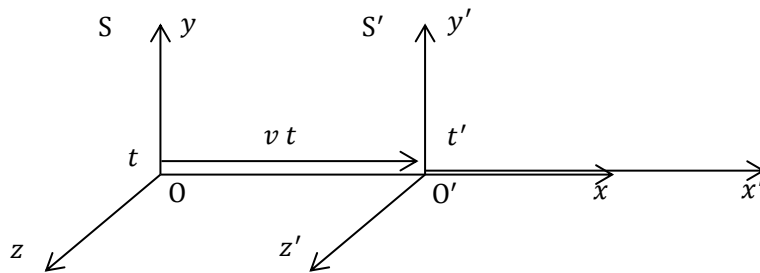
特殊相対論の原理は次の2つである。

- (1) すべての慣性系で物理法則は同じ数式で表される。
- (2) すべての慣性系で光速  $c$  は同じである。

図(v)のように、慣性系  $S$  に対してもう一つの慣性系  $S'$  が、 $S$  系の  $x$  軸方向に一定の速度  $v$  で移動しており、時刻の原点  $t = 0, t' = 0$  のとき、2つの座標軸  $(x, y, z)$  と  $(x', y', z')$  が重なっていたとする。この場合、ある事象が  $S$  系では世界点  $(ct, x, y, z)$  に、 $S'$  系では世界点  $(ct', x', y', z')$  に生じたとする、上記の原理より、これらの間には次のローレンツ変換が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned}
ct' &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} ct - \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} x \\
x' &= \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} ct + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} x \\
y' &= y, \quad z' = z
\end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned}
ct &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} ct' + \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} x' \\
x &= \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} ct' + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} x' \\
y &= y', \quad z = z'
\end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに、 $\beta = v/c$  である。その証明は、相対論のどの教科書にも載っているもので、ここでは省略する。



図(v) 慣性系  $S'$  が慣性系  $S$  の  $x$  軸に沿って一定速度  $v$  で移動する。

次に、光の平面進行波を考える。その角振動数と波数ベクトルを、 $S$  系では  $\omega, \mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ 、 $S'$  系では  $\omega', \mathbf{k}' = (k'_x, k'_y, k'_z)$  とする。

以下、描図の都合上、波の進行方向は  $x - y$  ( $x' - y'$ ) 面内にあるとする。すなわち、 $k_z = 0$ 、

$k'_z = 0$  とする。このように制限しても一般性を失わない。

いま, 図 (vi - a) のように, S 系において  $t = 0$  のときに赤い印をつけた波面が原点  $O$  を通過したとする。原点を通る光線上の任意点  $P(x_P, y_P, 0)$  の原点  $O$  からの距離を  $r_P$  とする。赤い波面が点  $P$  に達する時刻は  $t_P = r_P/c$  で, そのあと時刻  $t$  のときに青い印をつけた波面が点  $P$  を通過したとする。時刻  $t_P$  と  $t$  の間に点  $P$  を通り過ぎる波の数は,

$$\frac{\omega}{2\pi} (t - t_P) = \frac{\omega}{2\pi} \left( t - \frac{r_P}{c} \right)$$

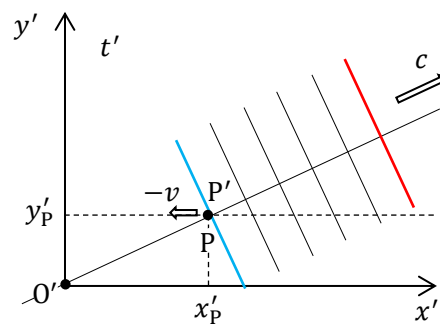
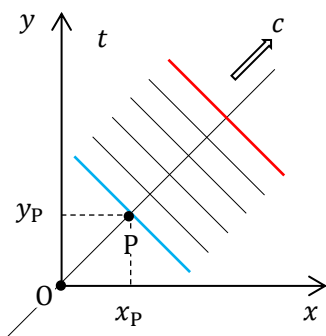
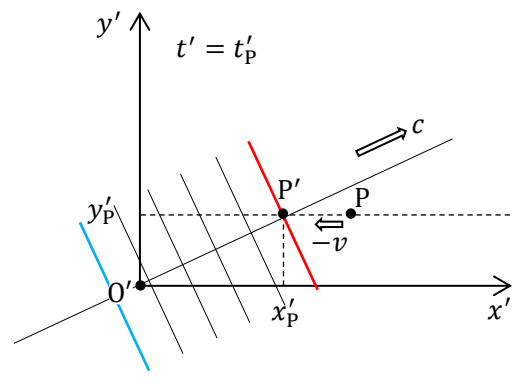
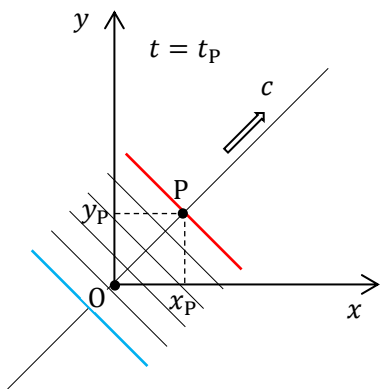
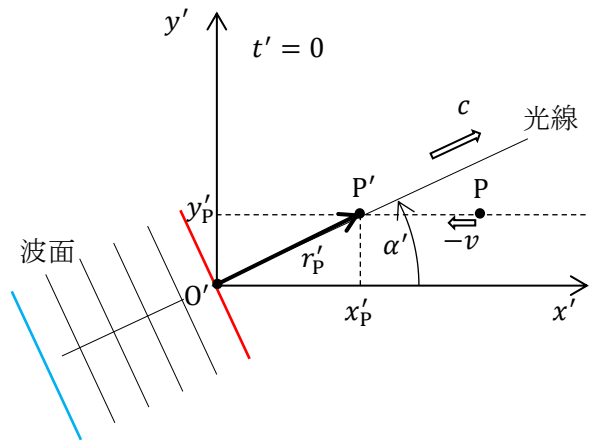
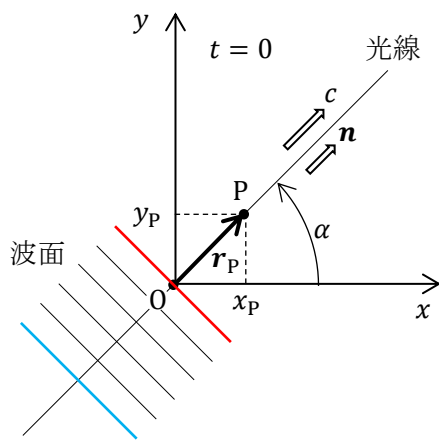


図 (vi - a) S 系を伝わる平面波

図 (vi - b) S' 系を伝わる平面波

である。この現象を  $S'$  系で見ると次のようになる。時刻の原点のときに両系の座標原点が一致しているので、時刻  $t' = 0$  のときに赤い波面が原点  $O'$  を通過する。また、点  $P$  は  $x' - y'$  面内の直線  $y' = y'_P$  上を速度  $-v$  で移動する。その軌道と原点  $O'$  を通る光線の交点を  $P'$  とする。 $O'P' = r'_P$  とすれば、赤い波面が点  $P'$  を通過する時刻は  $t'_P = r'_P/c$  である。そのあと点  $P$  が点  $P'$  に達した時刻  $t'$  のときに、青い波面が点  $P'$  を通過する。時刻  $t'_P$  と  $t'$  の間に点  $P'$  を通り過ぎる波の数は、

$$\frac{\omega'}{2\pi} (t' - t'_P) = \frac{\omega'}{2\pi} \left( t' - \frac{r'_P}{c} \right)$$

である。赤い波面と青い波面の間にある波の数は、座標軸の取り方に依らないから、

$$\omega' \left( t' - \frac{r'_P}{c} \right) = \omega \left( t - \frac{r_P}{c} \right) \quad (2)$$

が成り立つ。ここで、 $c$  と  $\omega$  ( $\omega'$ ) と  $\mathbf{k}$  ( $\mathbf{k}'$ ) の間に成り立つ関係式を用いれば、

$$\frac{\omega}{c} r_P = |\mathbf{k}| r_P = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_P = k_x x_P + k_y y_P$$

$$\frac{\omega'}{c} r'_P = |\mathbf{k}'| r'_P = \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'_P = k'_x x'_P + k'_y y'_P$$

を得る。これらを式 (2) に代入すれば、

$$\omega' t' - k'_x x'_P - k'_y y'_P = \omega t - k_x x_P - k_y y_P \quad (3)$$

となる。青い波面が点  $P$  を通過するという事象に対して、 $S$  系と  $S'$  系の間にローレンツ変換が成り立つので、式 (1) を式 (3) の右辺の  $t, x_P, y_P$  に代入して整理すると、

$$\omega' t' - k'_x x'_P - k'_y y'_P = \omega \frac{1 - \frac{k_x v}{\omega}}{\sqrt{1 - \beta^2}} t' - k_x \frac{1 - \frac{\omega v}{k_x c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} x'_P - k_y y'_P$$

となる。両辺の  $t', x'_P, y'_P$  の係数が等しくなければならないことから、

$$\omega' = \frac{1 - \frac{k_x v}{\omega}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \omega, \quad k'_x = \frac{1 - \frac{\omega v}{k_x c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} k_x, \quad k'_y = k_y \quad (4)$$

を得る。さらに、 $S$  系での波数ベクトル  $\mathbf{k}$  の向き (光波の進行方向) の単位ベクトルを  $\mathbf{n}$  とし、 $\mathbf{k}$  と  $x$  軸の正の向きとのなす角度を  $\alpha$  とすると、

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n}, \quad k_x = |\mathbf{k}| \cos \alpha = \frac{\omega}{c} \cos \alpha$$

と表される。 $S'$  系でも同様に、 $k'_x = \frac{\omega'}{c} \cos \alpha'$  と表される。これらを式(4)に代入すれば、

$$\omega' = \frac{1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \omega \quad (5)$$

$$\cos \alpha' = \frac{\cos \alpha - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cos \alpha} \quad (6)$$

を得る。式 (5) と式 (6) は特殊相対論におけるドップラー効果の公式と光行差を表す式である。

式 (5) で  $\omega$  を S 系に固定された光源の角振動数  $\omega_S$  ,  $\omega'$  を S' 系に乗っている観測者が受け取る光の角振動数  $\omega_0$  とし,  $v$  を視線速度 ( $\alpha = 0$ ) とすれば, 式 (5) は,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \omega_S \quad (7)$$

となる。逆に,  $\omega$  を S 系の原点に静止している観測者が受け取る光の角振動数  $\omega_0$  ,  $\omega'$  を S' 系の原点に固定された光源の角振動数  $\omega_S$  とし,  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = -v$  に注意すれば, 式 (7) と同じ式を得る。運動は相対的で, 観測者が光源から遠ざかっているのか, それとも光源が観測者から遠ざかっているのか, エーテルのような絶対系が存在しないので区別できない。よって, これは当然の結果である。

式 (7) において,  $|v| \ll c$  であれば,

$$\omega_0 = \left(1 - \frac{v}{c}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{v}{c}\right)^{-1/2} \omega_S \cong \frac{c-v}{c} \omega_S \cong \frac{c}{c+v} \omega_S \quad (8)$$

となり, 音波の場合のドップラー効果の公式と同じになる。音波の場合には空気という「絶対系」が存在するので, 観測者と音源のどちらが遠ざかっているのかを区別できる。したがって, 式 (8) の最後の 2 つの式の物理的意味が違ってくる。

## 余談

一般的な渦巻銀河の回転曲線は, 銀河中心からの距離が大きいところで平坦になっており, ケプラー回転に従うものはないといってもよい。この発見に対する最大の功労者は Vera C. Rubin (1928~2016) である。彼女は1960年代前半に, 天の川銀河の中心から見て太陽より遠いところにある O・B 型星の視線速度を測定し, 既知のスペクトル型と 3 色測光値から計算した太陽からの距離を組み合わせて, 天の川銀河の回転曲線を求めた。その曲線は太陽より外側で平坦に近く, ケプラー回転に漸近していない。つづいて1960年代後半に, M31(アンドロメダ銀河) にある 67 個の HII 領域から放射される  $H_\alpha$  線などの輝線スペクトルを測定して, M31 の回転曲線を求めた。これもまた, 観測範囲の端に近くなっても平坦なままである。さらにその 10 年後, 観測機器の高性能化に伴って, 多くの渦巻銀河の回転曲線を問題 1 に登場した方法で求め, 銀河中心から遠いところで平坦になるのが一般的であることを明らかにした。これによって天文学者は暗黒物質の存在に直面せざるを得なくなったのである。

このような物理学史に残る研究成果をあげた Rubin と, かみのけ座銀河団の観測に基づいて暗黒物質の存在を主張した Fritz Zwicky (1898~1974) には, ノーベル賞が授与されてもよかったと思うが, 兩人ともすでに故人となっている。Zwicky は生前, 暗黒物質の存在に関する論文に自

分の論文が引用されていないと機嫌が悪かったと言うが、当然であろう。Zwicky の観測論文については、筆者の「[負の比熱とヴィリアル定理](#)」に解説がある。Rubin のノーベル賞受賞が実現しなかったことについては、女性研究者に対する偏見があるからではないかとの批判がある。これに関連するスウェーデン王立科学アカデミーによるノーベル賞の選考過程は50年後でないとわからないが、光学研究者の Donna Strickland が2018年に、天体物理学者の Andrea M. Ghez が2020年にノーベル物理学賞を受賞しているのに、この批判は当たらないような気がする。気の毒だが、Rubin は運が悪かったと言うしかない。しかしながら、パルサーの発見者である Susan J. Bell にノーベル賞が授与されなかったことについては、問題がありそうである。選考過程でどのような審議がされたのかは 2024 年に判明する。

Rubin の業績を顕彰して、“Vera C. Rubin Observatory” と名付けられた天文台が2022年に完成する。ここに設置される口径 8.4m の望遠鏡には、32億画素の CCD センサーを用いた9.6平方度(月 46 個分)という超広視野のカメラが搭載されており、掃天観測が行なわれることになっている。主な目標は次のようなものである。

- (1) 重力レンズ効果の測定による暗黒物質の研究
- (2) 太陽系内の小天体のカタログ作成
- (3) 超新星爆発のような突発的な現象の探索
- (4) 天の河銀河の星図作成

いずれびっくりするような発見が飛び出してくるに違いない。

[他の演習問題へ](#)