

問題 1 暗黒物質存在の観測的根拠

次の文中の { } から正しいものを選び, に適切な数式または数値を記入せよ。

(A) 点磁荷 q_m から距離 d だけ離れた点での磁場の大きさ H は, 真空の透磁率を μ_0 として,

$$H = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{|q_m|}{d^2}$$

で与えられる。その向きは, $q_m > 0$ の場合は点磁荷から遠ざかる向きで, $q_m < 0$ の場合は点磁荷に近づく向きである。

長さ ℓ の細い棒磁石の N 極と S 極にある磁荷をそれぞれ q_m と $-q_m$ とする。このとき大きさが $q_m \ell$ で S 極から N 極へ向くベクトル $q_m \vec{\ell}$ を磁気双極子モーメントという。

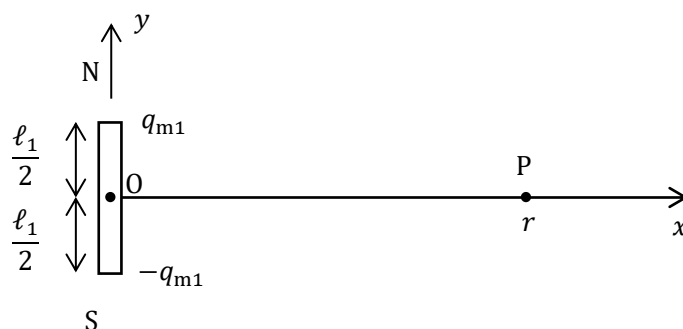


図 1 $x - y$ 平面の原点に固定された棒磁石 1

いま図 1 のように, 磁気双極子モーメント $q_{m1} \vec{\ell}_1$ ($q_{m1} > 0$) の棒磁石 1 を, 直交座標 (x, y) の原点 O に固定する。このとき点 $P(r, 0)$ には, ⁽¹⁾ $\{x, y\}$ 軸の ⁽²⁾ $\{正, 負\}$ の向きに大きさが (3) の磁場ができる。

もし, $\ell_1 \ll r$ であれば, $(\ell_1 / r)^2 \cong 0$ と近似することができ, この磁場の大きさは近似的に (4) と表すことができる。また, 点 P の近傍での磁場は一様と見なせる。

つぎに, 図 2 のように, 磁気双極子モーメント $q_{m2} \vec{\ell}_2$ ($q_{m2} > 0$) の棒磁石 2 を点 P に固定する。ただし, $q_{m2} \vec{\ell}_2$ と $q_{m1} \vec{\ell}_1$ は平行で同じ向きとし, $\ell_2, \ell_1 \ll r$ を満たすものとする。

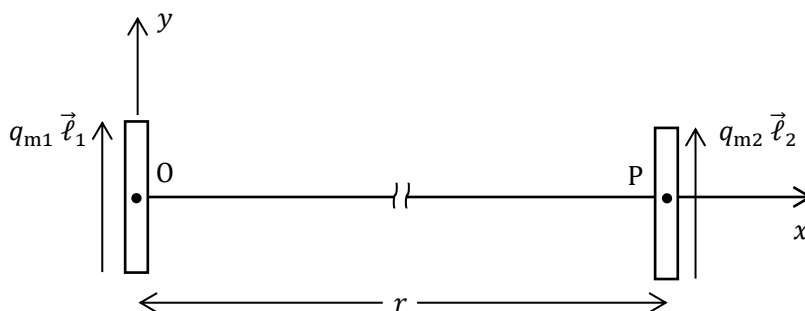


図 2 棒磁石 1 と 2 の位置関係

このとき、棒磁石 2 の N 極が棒磁石 1 による磁場から受ける力は、⁽⁵⁾ $\{x, y\}$ 軸の ⁽⁶⁾ $\{正, 負\}$ の向きで大きさが $\boxed{(7)}$ である。この力を逆向きにした力が棒磁石 2 の S 極にはたらく。

ここで棒磁石 2 の固定を解き、その中心のまわりにゆっくり 180° 回転させ、磁気双極子モーメントを反転させる。この操作に要する仕事は $\boxed{(8)}$ である。よって、磁気力による棒磁石 2 の位置エネルギーは、反転前より反転後の方が ⁽⁹⁾ $\{高, 低\}$ くなる。

(B) 電子は空間的な大きさを持たないが、負の電荷と自転に相当する物理量 (スピン) を持っている。帯電している球が自転すれば円電流が流れ、それによって周囲に磁場が生じるので、自転する帯電球は磁石の性質を持つようになる。それと同様に、電子は大きさのない磁石のように振る舞う。その磁気双極子モーメントの大きさ μ_e は、測定実験から $1.2 \times 10^{-29} \text{ Wb m}$ であることがわかっている。陽子も磁気双極子モーメントを持っており、その大きさ μ_p は、 $1.8 \times 10^{-32} \text{ Wb m}$ である。

ボーアの水素原子模型によれば、エネルギー準位が最も低い基底状態において、電子は陽子のまわりを等速円運動しており、その半径 (ボーア半径 r_B) は $5.3 \times 10^{-11} \text{ m}$ である。この電子と陽子は磁気双極子モーメントを持っているので、磁気作用をおよぼし合う。

ここで、上記 (A) の考え方が原子の世界にも適用できると仮定する。ボーア模型では、電子は円運動しているのだが、ここでは陽子から r_B だけ離れたところに静止しているとし、(A) の $q_{m1} \ell_1$ と $q_{m2} \ell_2$ をそれぞれ μ_p と μ_e に置き換え、陽子と電子の磁気双極子モーメントが図 3 のように、同じ向きのとときと逆向きのときの位置エネルギーの差 ΔE を求めれば、

$$\Delta E = \boxed{(10)} \quad (\text{数値})$$

となる。ただし、 $\frac{1}{4\pi\mu_0} = 6.3 \times 10^4 \text{ N m}^2/\text{Wb}^2$ である。

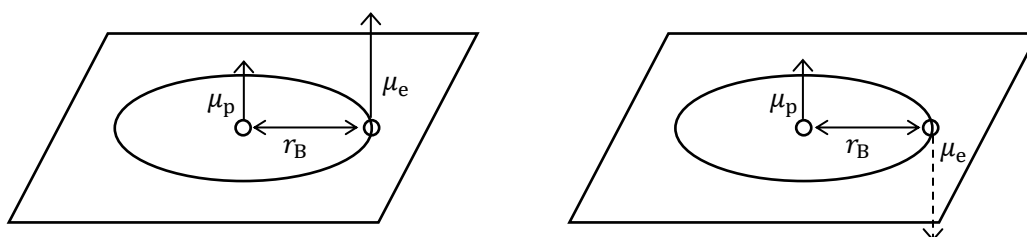


図 3 陽子と電子の磁気双極子モーメントの向き

当然ながら、根拠が明瞭でないこのような計算では ΔE の正しい値は得られない。原子のような微小な世界での現象を正しく記述する量子力学を用いて計算すれば、

$$\Delta E = 9.4 \times 10^{-25} \text{ J}$$

となる。この値を用いれば、基底状態にある水素原子が、磁気双極子モーメントの相互作用によっ

て、高いエネルギー準位 E_{1H} から低いエネルギー準位 $E_{1L} (= E_{1H} - \Delta E)$ へ遷移するとき放射する電磁波の波長 λ は、光速 c を $3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$ 、プランク定数 h を $6.6 \times 10^{-34} \text{ Js}$ として、

$$\lambda = \boxed{(11)} \text{ (数値)}$$

となる。電波領域にあるこの波長を水素原子の超微細構造線という。

(C) 波長 λ_0 の単色光を放射する光源が、静止している観測者に対して運動している。その視線速度成分を v とする。このとき観測者がこの光の波長を測定すれば、 $\lambda_0 + \boxed{(12)}$ となる。ただし、光源が観測者から遠ざかるときに $v > 0$ とする。 $|v| \ll c$ (光速) であるので、光波は音波と同じドップラー効果の公式に従うとしてよい。

(D) 典型的な渦巻銀河は数千億個の恒星と無視できない量の星間気体から成る円盤状の天体で、円盤に垂直な対称軸のまわりに回転している。回転軸から距離 r のところにある恒星と星間気体の集合体は、平均すれば、速さ V で等速円運動している。 V と r の関係をグラフで表したものを回転曲線という。

星間気体から星が生まれると、星から放射される紫外線を吸収して、星間気体の主成分である水素原子が電離する。水素イオンと電子はやがて再結合し、水素原子に固有な波長の光を放射する。その一つである H_α 線は第 2 励起状態から第 1 励起状態へ電子が遷移するとき放射される赤い光で、このような星間気体 (H II 領域という) が可視光線で赤く見えるのはこの光による。他の原子や分子も同様に、それぞれに固有な波長の電磁波を放射している。以下では H_α 線の波長を λ_α とする。

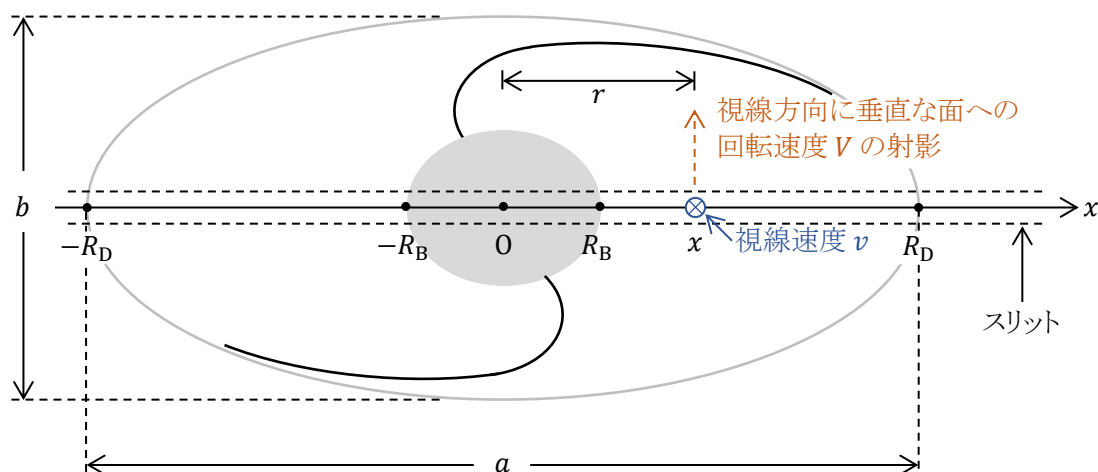


図 4 可視光線で見た典型的な渦巻銀河

一般的に、銀河の回転軸は視線方向に対して傾いているので、地球から可視光線で観測すれば、渦巻銀河は図 4 のように楕円形に見える。その長軸に沿って望遠鏡の焦点面にスリットを設置し、それを通過した光の波長を分光器によって測定する。長軸上にある H II 領域から放射された H α 線の波長は λ_α からずれている。そのずれ $\Delta\lambda$ と長軸に沿っての位置 x との関係を図 5 に与えられている。ただし、銀河の中心 O を $x = 0$ としている。

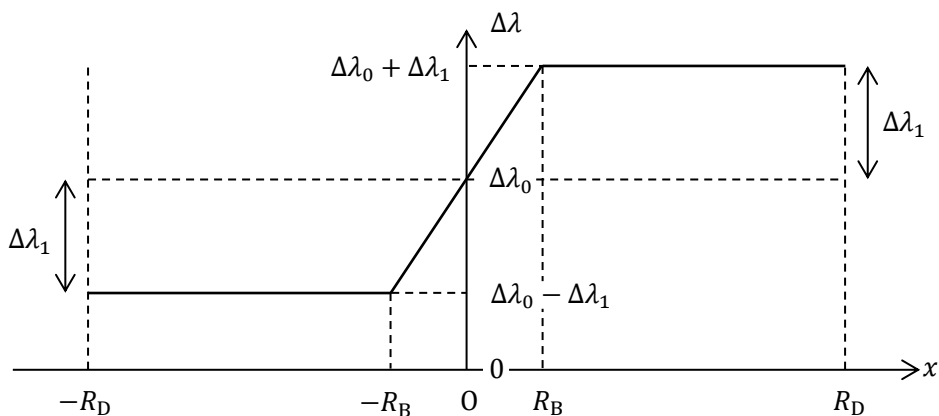


図 5 H α 線の測定された波長の λ_α からのずれ $\Delta\lambda$ と長軸に沿っての位置 x との関係

図 5 から、観測された銀河の中心 O は、視線方向に速さ (13) で地球から後退していることがわかる。ただし、その後退速度は光速 c より十分小さいとする。また、この銀河の回転曲線は図 6 の実線のようになり、 $r > R_B$ では、可視光線で測定できる銀河の端 ($r = R_D$) まで、 V は r に依らない一定の速さになっている。その速さ V_C を $\Delta\lambda_1, \lambda_\alpha, c, a, b$ を用いて表せば、(14) となる。

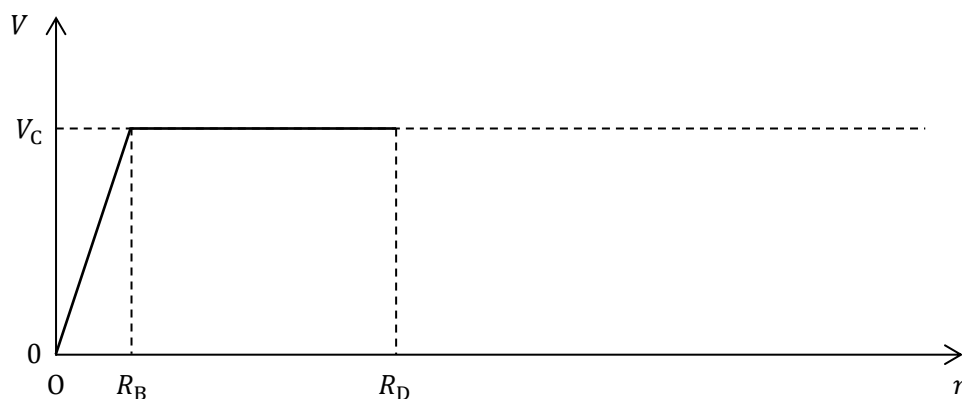


図 6 図 4 に描かれた渦巻銀河の回転曲線

つぎに、長軸に沿って単位面積あたりの可視光線の明るさを測定すると、バルジと呼ばれる中心部 ($r < R_B$) を除いた円盤部 ($R_B < r < R_D$) では、図 7 のグラフのように、中心 O からの距離 r に対して指数関数的に減少する。質量と可視光線の明るさが比例しているとすれば、中心 O から遠く離れたところ ($r > R_D$) では、この銀河に属する恒星や星間気体の質量は無視できるほど小さいであろう。したがって、この領域にある仮想的な物体が中心 O のまわりに円運動しているとすれば、この領域での仮想的な回転曲線は、 $V(r) = \boxed{(15)}$ と表せる。ただし、この物体にはたらく力は、この銀河の全質量 M_T が中心 O にあるとしたときにおよぼす万有引力に等しいとし、万有引力

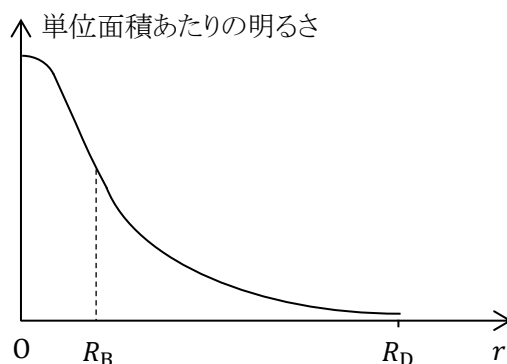


図 7 渦巻銀河の長軸に沿って測った可視光線の明るさ

定数を G とする。もし実際の回転曲線がこのようになっておれば、中心 O から遠く離れれば離れるほど、回転速度はより小さくなるはずである。

ところが、中心 O から遠く離れたところでも、銀河を取り巻く水素原子がわずかながらも存在し、(B) で述べた電波を放射している。その波長の超微細構造線からのずれを測定することによって、 H_{α} 線の場合と同様にして回転曲線を求めることができる。その結果は図 6 の破線が示すように、 $V = V_C$ となっている。したがって、この円運動の向心力をもたらす原因物質は、恒星や星間気体のような通常物質ではない。これを暗黒物質と呼んでいるが、その正体は不明で、天体物理学の最重要問題となっている。

いま仮に、暗黒物質が銀河の中心 O のまわりに球対称的に分布しているとし、通常物質の質量も含めて、半径 r の球の内部にある全質量を $M(r)$ とする。そして、その球面上にある物質にはたらく力は、質量 $M(r)$ が中心 O にあるとしたときにはたらく万有引力に等しいとする。このとき、超微細構造線の電波を放射しながら速さ V_C で半径 r の円運動をしている水素ガスに着目すれば、 $M(r)$ は、 V_C, G, r を用いて $\boxed{(16)}$ と表される。この式は、暗黒物質が銀河を取り巻く広大な宇宙空間に広く分布していることを示唆している。

問題1の解答

(A) N 極と S 極が点 P に作る磁場をベクトルの的に重ね合わせれば, (1) y 軸の (2) 負の向きに大きさが

$$H_1 = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{q_{m1}}{r^2+(\ell_1/2)^2} \frac{\ell_1/2}{\sqrt{r^2+(\ell_1/2)^2}} \times 2 = \quad (3) \quad \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{q_{m1}\ell_1}{\left\{r^2+\left(\frac{\ell_1}{2}\right)^2\right\}^{3/2}}$$

となる。 $\ell_1 \ll r$ のときには, 次のように近似できる。

$$H_1 = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{q_{m1}\ell_1}{r^3} \left\{ 1 + \left(\frac{\ell_1}{2r}\right)^2 \right\}^{-3/2} \approx \quad (4) \quad \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{q_{m1}\ell_1}{r^3}$$

棒磁石 2 の N 極が点 P 近傍の様な磁場 \vec{H}_1 から受ける力 \vec{f}_{21} は, 向きが \vec{H}_1 の向き, すなわち,

(5) y 軸の (6) 負の向きで, 大きさが

$$f_{21} = q_{m2}H_1 \approx \quad (7) \quad \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{q_{m2} \cdot q_{m1}\ell_1}{r^3}$$

である。

棒磁石 2 の両端に外力をおよぼしてゆっくり半回転させるとき, N 極におよぼす外力は $-\vec{f}_{21}$, すなわち y 軸の正の向きに大きさが f_{21} であるから, この外力が半回転する間に棒磁石 2 にする仕事は $-f_{21} \ell_2$ である。S 極におよぼす外力が半回転の間にする仕事も $-f_{21} \ell_2$ であるから, 外力がする仕事の和は,

$$-f_{21} \ell_2 \times 2 = \quad (8) \quad -\frac{1}{2\pi\mu_0} \frac{q_{m2}\ell_2 \cdot q_{m1}\ell_1}{r^3}$$

となる。外力は棒磁石 2 に負の仕事をするので, 棒磁石 2 の磁気力による位置エネルギーは減少する。よって, 磁気双極子モーメントを反転させる前より後の方が位置エネルギーは (9) 低くなる。

(B) (8) の答に与えられた数値を代入すれば,

$$\begin{aligned} \Delta E &= \left| -\frac{2}{4\pi\mu_0} \frac{\mu_e \mu_p}{r_B^3} \right| \\ &= 2 \times 6.3 \times 10^4 \text{ Nm}^2/\text{Wb}^2 \times \frac{(1.2 \times 10^{-29} \text{ Wbm})(1.8 \times 10^{-32} \text{ Wbm})}{(5.3 \times 10^{-11} \text{ m})^3} \\ &= (10) \quad 1.8 \times 10^{-25} \text{ J} \end{aligned}$$

となる。 λ は, 問題文に与えられている ΔE の値とボーアの振動数条件 $\frac{hc}{\lambda} = \Delta E$ より,

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{(6.6 \times 10^{-34} \text{ Js})(3.0 \times 10^8 \text{ m/s})}{9.4 \times 10^{-25} \text{ J}} = (11) \quad 0.21 \text{ m}$$

となる。

(C) 観測者が受け取る光の波長を $\lambda_0 + \Delta\lambda$ とすれば、ドップラー効果の公式より、

$$\frac{c}{\lambda_0 + \Delta\lambda} = \frac{c}{c+v} \frac{c}{\lambda_0} \quad \text{が成り立ち,} \quad \Delta\lambda = \boxed{\frac{v}{c} \lambda_0} \quad \text{を得る.} \quad (12)$$

(D) 図 5 より、中心 O で $\Delta\lambda = \Delta\lambda_0$ であるから、後退速度を v_0 とすると、(12) の答より、

$$\Delta\lambda_0 = \frac{v_0}{c} \lambda_\alpha \quad \text{ゆえに,} \quad v_0 = \boxed{\frac{\Delta\lambda_0}{\lambda_\alpha} c} \quad (13)$$

(14) 長軸上で、 $R_B < x < R_D$ にある H II 領域の視線速度を $v(x)$ とすると、(13) と同様にして、

$$v(x) = \frac{\Delta\lambda_0 + \Delta\lambda_1}{\lambda_\alpha} c = v_0 + \frac{\Delta\lambda_1}{\lambda_\alpha} c \quad (1)$$

を得る。 $-R_D < x < -R_B$ でも同様にして、

$$v(x) = \frac{\Delta\lambda_0 - \Delta\lambda_1}{\lambda_\alpha} c = v_0 - \frac{\Delta\lambda_1}{\lambda_\alpha} c \quad (2)$$

視線方向と回転軸のなす角度を θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) とすれば、下の図 a より、

$$\cos \theta = \frac{b}{a}$$

であるから、式①と式②を満たす長軸上の位置 x で、中心 O に対する回転速度の大きさ $V(r)$ は、

$$V(r) = \frac{|v(x) - v_0|}{\sin \theta} = \boxed{\frac{\frac{\Delta\lambda_1}{\lambda_\alpha} c}{\sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}}} \quad (14)$$

となる。右辺が求める一定値の V_C である。

(15) 質量 m の仮想物体に対する運動方程式の向心成分は、

$$m \frac{V^2(r)}{r} = m \frac{GM_T}{r^2}$$

であるから、

$$V(r) = \boxed{\sqrt{\frac{GM_T}{r}}} \quad (15)$$

となる。中心 O から遠く離れたところでは、回転速度が $r^{-1/2}$ に従って減少する。このような回転運動をケプラー回転という。

(16) この水素ガスの質量を m とすれば、その運動方程式の向心成分は、

$$m \frac{V_C^2}{r} = m \frac{GM(r)}{r^2}$$

であるから、

$$M(r) = \boxed{\frac{V_C^2}{G} r} \quad (16)$$

となる。よって、 $V(r) = V_C$ を満たす水素ガスがあるかぎり、半径 r の球の内部にある暗黒物質は r に比例して増加していく。

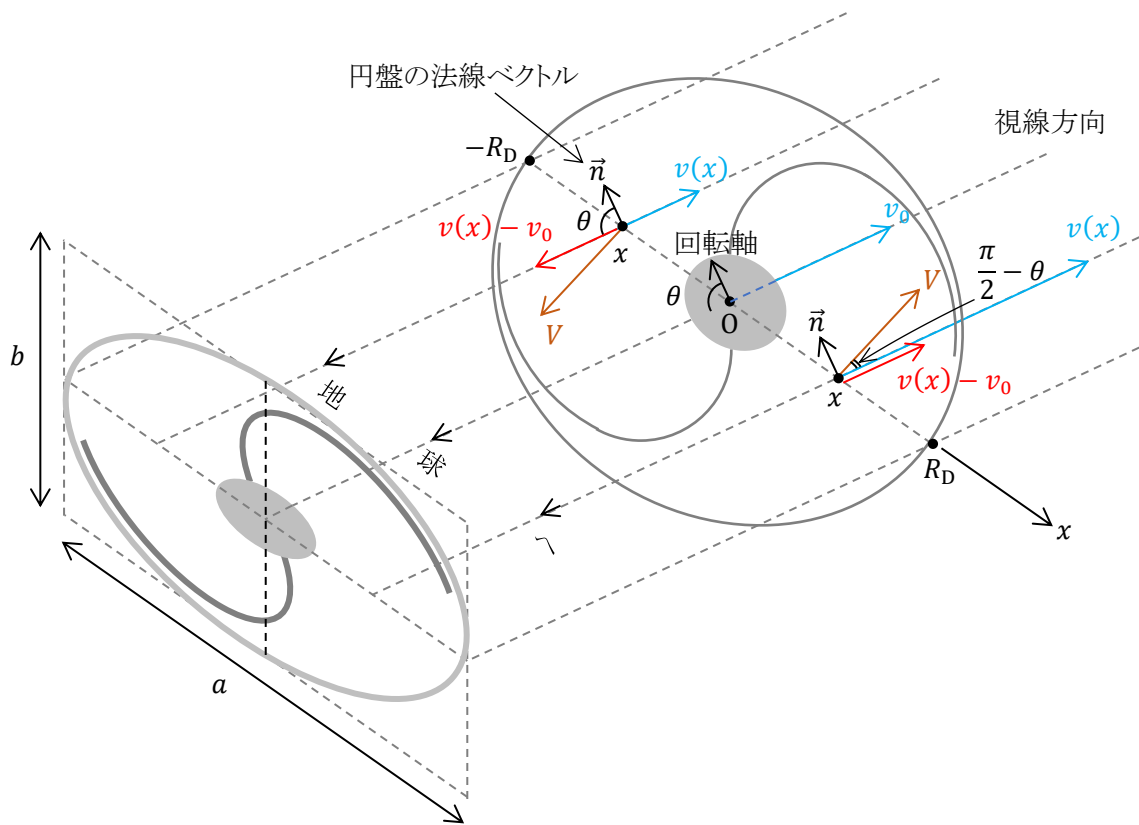


図 a 視線速度と渦巻銀河の回転速度の関係

以上は高校生と大学受験生に対する解答です。大学生と物理教育に関心をお持ちの方に対する解説は[続編](#)をご覧ください。

他の演習問題へ