ラグランジュ点について（後篇）

斉藤　全弘

§1　制限三体問題の基本方程式

　図 1 のように，質量 m_1 , m_2 の天体 M_1 , M_2 が重心 G のまわりに，半径 a_1 , a_2 , 角速度 ω の円運動をしていて，質量が無視できるほど小さい第三体 M_3 が M_1 , M_2 から重力を受けているとき，M_3 の運動を論じる問題を制限三体問題という。

　M_1 , M_2 が M_3 から受ける重力は無視できるので，$\overline{\mathrm{M_1M_2}} = a$ とし，重力定数を G とすれば，

$$a_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\ a\,,\quad a_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\ a \qquad ①$$

$$m_1 a_1 \omega^2 = \frac{G m_1 m_2}{a^2} = m_2 a_2 \omega^2 \qquad ②$$

が成り立つ。ここで質量と長さと時間の単位を，

$$m_1 + m_2 = 1\,,\quad a = 1\,,\quad \omega = 1 \qquad ③$$

となるように選び，

$$\mu = \frac{m_2}{m_1+m_2} \qquad ④$$

とおけば，

$$a_1 = \mu\,,\quad a_2 = 1-\mu\,,\quad G = \frac{a^3\omega^2}{m_1+m_2} = 1 \qquad ⑤$$

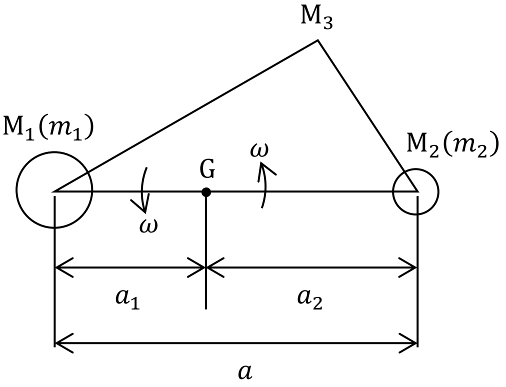

図　1

となる。この単位系は制限三体問題を論じるときに昔から採用されているものなので，ここでもこれを踏襲する。

　図 2 のように，G を原点とし，M_1 , M_2 の軌道面に垂直な方向を z 軸とする慣性系 $\mathrm{G}-x\,y\,z$ を導入する。時刻 $t=0$ のとき M_1 , M_2 が x 軸上にあるとすれば，時刻 t での M_1 , M_2 の位置は，

$$\left.\begin{aligned} &x_1 = -\mu\cos t\,,\quad y_1 = -\mu\sin t\,,\quad z_1 = 0 \\ &x_2 = (1-\mu)\cos t\,,\quad y_2 = (1-\mu)\sin t\,,\quad z_2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad ⑥$$

と表される。M_3 の位置を(x, y, z)とし，M_1 , M_2 から M_3 までの距離を r_1 , r_2 とすれば，M_3 の運動方程式から，

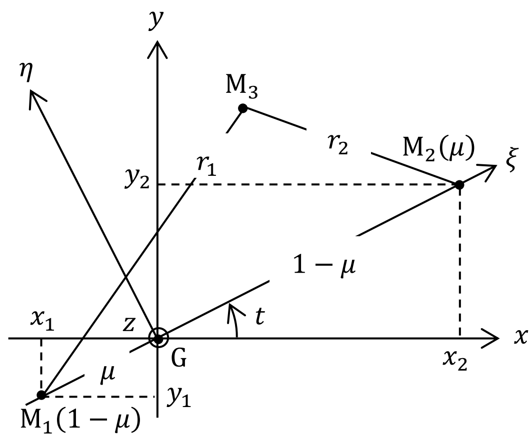

図　2

$$\ddot{x} = -\frac{\partial U_g}{\partial x}\,,\quad \ddot{y} = -\frac{\partial U_g}{\partial y}\,,\quad \ddot{z} = -\frac{\partial U_g}{\partial z} \qquad ⑦$$

$$U_g = -\frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} \qquad ⑧$$

を得る。ここで，z 軸のまわりに角速度 $\omega(=1)$ で回転する回転座標系 (ξ, η, ζ) を導入し，$t=0$ のとき x 軸と ξ 軸が重なっているとすると，両座標系の変換式は，

$$\left.\begin{array}{l} x = \xi\cos t - \eta\sin t\ ,\quad y = \xi\sin t + \eta\cos t\ ,\quad z = \zeta \\ \xi = x\cos t + y\sin t\ ,\quad \eta = -x\sin t + y\cos t\ ,\quad \zeta = z \end{array}\right\} \tag{⑨}$$

であるから，

$$\ddot{x} = \left(\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} - \xi\right)\cos t - \left(\ddot{\eta} + 2\dot{\xi} - \eta\right)\sin t$$

$$\ddot{y} = \left(\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} - \xi\right)\sin t + \left(\ddot{\eta} + 2\dot{\xi} - \eta\right)\cos t$$

$$-\frac{\partial U_g}{\partial x} = -\frac{\partial U_g}{\partial \xi}\cos t + \frac{\partial U_g}{\partial \eta}\sin t$$

$$-\frac{\partial U_g}{\partial y} = -\frac{\partial U_g}{\partial \xi}\sin t - \frac{\partial U_g}{\partial \eta}\cos t$$

$$-\frac{\partial U_g}{\partial z} = -\frac{\partial U_g}{\partial \zeta}$$

が成り立つ。これらを⑦に代入し，$\cos t$,$\sin t$ を消去すれば，

$$\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} - \xi = -\frac{\partial U_g}{\partial \xi}\ ,\quad \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} - \eta = -\frac{\partial U_g}{\partial \eta}\ ,\quad \ddot{\zeta} = -\frac{\partial U_g}{\partial \zeta} \tag{⑩}$$

を得る。さらに，

$$U = U_g - \frac{1}{2}\left(\xi^2 + \eta^2\right) \tag{⑪}$$

とおけば，⑩は，

$$\ddot{\xi} = -\frac{\partial U}{\partial \xi} + 2\dot{\eta} \cdots (\mathrm{a})\ ,\quad \ddot{\eta} = -\frac{\partial U}{\partial \eta} - 2\dot{\xi} \cdots (\mathrm{b})\ ,\quad \ddot{\zeta} = -\frac{\partial U}{\partial \zeta} \cdots (\mathrm{c}) \tag{⑫}$$

と書き換えられる。⑩あるいは⑫が制限三体問題の基本方程式である。これには次のようなエネルギー積分が存在する。$\dot{\xi} \times (\mathrm{a}) + \dot{\eta} \times (\mathrm{b}) + \dot{\zeta} \times (\mathrm{c})$ より，

$$\dot{\xi}\ddot{\xi} + \dot{\eta}\ddot{\eta} + \dot{\zeta}\ddot{\zeta} = -\dot{\xi}\frac{\partial U}{\partial \xi} - \dot{\eta}\frac{\partial U}{\partial \eta} - \dot{\zeta}\frac{\partial U}{\partial \zeta}$$

$$\rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{2}\left(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2\right) + U\right\} = 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}\left(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2\right) - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} - \frac{1}{2}\left(\xi^2 + \eta^2\right) = E(\text{一定}) \tag{⑬}$$

ただし，

$$r_1 = \{(\xi + \mu)^2 + \eta^2 + \zeta^2\}^{1/2}\ ,\quad r_2 = \{(\xi + \mu - 1)^2 + \eta^2 + \zeta^2\}^{1/2} \tag{⑭}$$

である。このエネルギー積分をヤコービの積分という。

§2 平衡点の位置

回転座標系 (ξ , η , ζ) から見たときに，

$$-\frac{\partial U}{\partial \xi} = -\frac{(1-\mu)(\xi+\mu)}{{r_1}^3} - \frac{\mu(\xi+\mu-1)}{{r_2}^3} + \xi = 0 \qquad ⑮$$

$$-\frac{\partial U}{\partial \eta} = -\frac{(1-\mu)\eta}{{r_1}^3} - \frac{\mu\eta}{{r_2}^3} + \eta = 0 \qquad ⑯$$

$$-\frac{\partial U}{\partial \zeta} = -\frac{(1-\mu)\zeta}{{r_1}^3} - \frac{\mu\zeta}{{r_2}^3} = 0 \qquad ⑰$$

が成り立てば，⑫より，

$$\ddot{\xi} = 2\dot{\eta}\,,\quad \ddot{\eta} = -2\dot{\xi}\,,\quad \ddot{\zeta} = 0$$

となる。よって，⑮，⑯，⑰を満たす位置で $\dot{\xi} = \dot{\eta} = \dot{\zeta} = 0$ であれば，$\ddot{\xi} = \ddot{\eta} = \ddot{\zeta} = 0$ となり，M_3 はその位置で静止しつづける。この平衡点をラグランジュ点 (Lagrangian Point) という。その位置を求めよう。

まず，⑰より $\zeta = 0$ であるから，ラグランジュ点は $\xi - \eta$ 面上にある。

(I) 直線解

はじめに，$\eta = 0$ ，すなわちラグランジュ点が ξ 軸上にある場合を考える。このとき 3 つの領域 (i) $-\mu < \xi < 1-\mu$， (ii) $1-\mu < \xi$， (iii) $\xi < -\mu$ にある解の位置をそれぞれ L_1 , L_2 , L_3 と名付ける(図 3 参照)。ここで，

$$\left.\begin{aligned} \overline{\mathrm{L_1M_2}} &= (1-\mu) - \xi &&\equiv l_1 \\ \overline{\mathrm{L_2M_2}} &= \xi - (1-\mu) &&\equiv l_2 \\ \overline{\mathrm{L_3M_2'}} &= \xi - \{-(1+\mu)\} &&\equiv l_3 \end{aligned}\right\} \qquad ⑱$$

とおき，⑮を書き換えれば，

(i) L_1： ${l_1}^5 - (3-\mu){l_1}^4 + (3-2\mu){l_1}^3 - \mu\,{l_1}^2 + 2\mu\,l_1 - \mu = 0$ ⑲

(ii) L_2： ${l_2}^5 + (3-\mu){l_2}^4 + (3-2\mu){l_2}^3 - \mu\,{l_2}^2 - 2\mu\,l_2 - \mu = 0$ ⑳

(iii) L_3： ${l_3}^5 - (7+\mu){l_3}^4 + (19+6\mu){l_3}^3 - (24+13\mu)\,{l_3}^2 + (12+14\mu)\,l_3 - 7\mu = 0$ ㉑

となる。これらをラグランジュの 5 次方程式という。その解法については前篇で論じた。

(II) 正三角形解

つぎに，$\eta \neq 0$ の場合，

$$\frac{⑯}{\eta} \times (\xi+\mu-1)\ \text{より，}\quad -\frac{(1-\mu)(\xi+\mu-1)}{{r_1}^3} - \frac{\mu(\xi+\mu-1)}{{r_2}^3} + (\xi+\mu-1) = 0 \qquad ㉒$$

$$\frac{⑯}{\eta} \times (\xi+\mu)\ \text{より，}\quad -\frac{(1-\mu)(\xi+\mu)}{{r_1}^3} - \frac{\mu(\xi+\mu)}{{r_2}^3} + (\xi+\mu) = 0 \qquad ㉓$$

$$⑮\text{より，}\quad -\frac{(1-\mu)(\xi+\mu)}{{r_1}^3} - \frac{\mu(\xi+\mu-1)}{{r_2}^3} + \xi = 0 \qquad ㉔$$

を得る。ただし，$\zeta = 0$ であるから，

$$r_1 = \{(\xi+\mu)^2 + \eta^2\}^{1/2}\,,\quad r_2 = \{(\xi+\mu-1)^2 + \eta^2\}^{1/2}$$

である。さらに,

$$㉒-㉔より,\quad \frac{1-\mu}{{r_1}^3} + \mu - 1 = (1-\mu)\left(\frac{1}{{r_1}^3} - 1\right) = 0$$

$$㉔-㉓より,\quad \frac{\mu}{{r_2}^3} - \mu = \mu\left(\frac{1}{{r_2}^3} - 1\right) = 0$$

となり, $r_1 = r_2 = 1$ を得る。$\overline{\mathrm{M_1 M_2}} = 1$ であるから, このラグランジュ点と $\mathrm{M_1}$, $\mathrm{M_2}$ は正三角形をなす。$\eta > 0$ のラグランジュ点を $\mathrm{L_4}$, $\eta < 0$ のラグランジュ点を $\mathrm{L_5}$ という(図 3 参照)。その位置座標は,

$$(\xi, \eta) = \left(\frac{1}{2} - \mu, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \tag{㉕}$$

である。

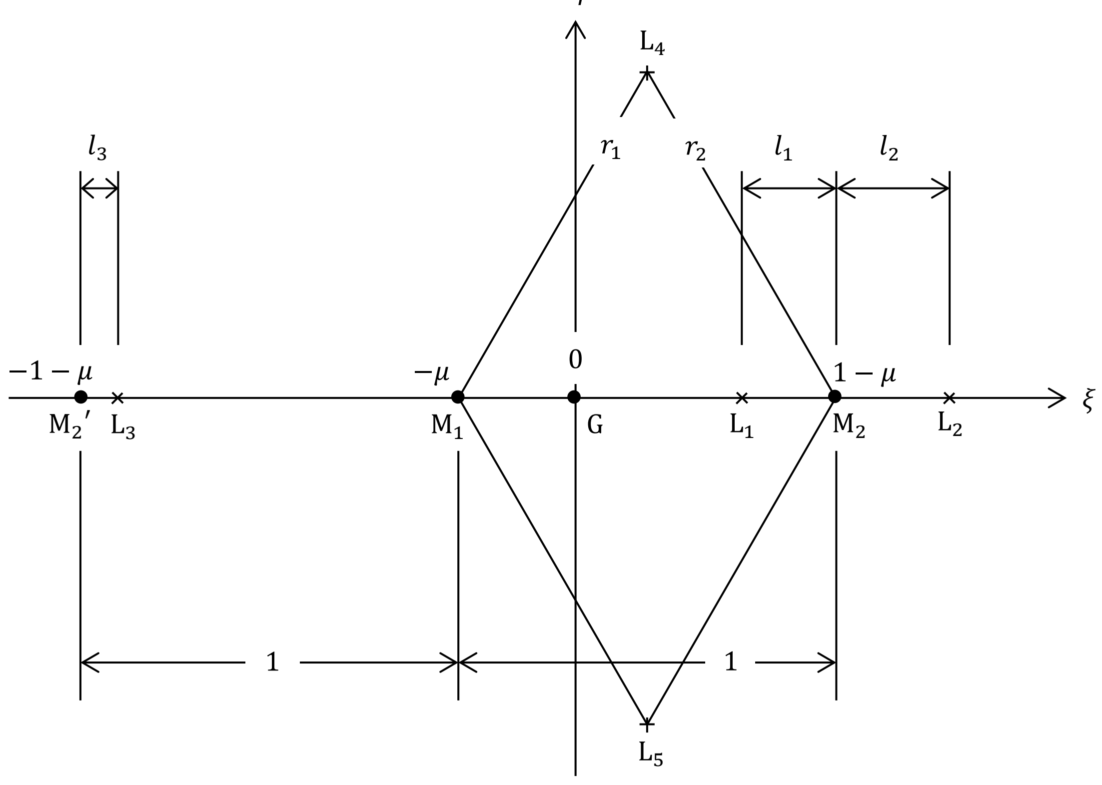

図 3

§3 連星系近傍での微粒子の運動

具体例として次のような近接連星を考える。

$$m_1 = 14.0\, M_\odot,\quad m_2 = 8.0\, M_\odot,\quad \mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{4}{11} \tag{㉖}$$

$M_\odot$ は太陽質量である。この具体例は次回連星パルサー(Binary Pulsar) の解説をするときに登場する。この連星による $\xi - \eta$ 面上でのポテンシャル関数 $U(\xi, \eta)$ は図 4 のようになっており, その等ポテンシャル線が図 5 に描かれている。さらに, ラグランジュの 5 次方程式⑲, ⑳, ㉑の数値解を求めれば,

$$l_1 = 0.442711,\quad l_2 = 0.604814,\quad l_3 = 0.215486 \tag{㉗}$$

となる。

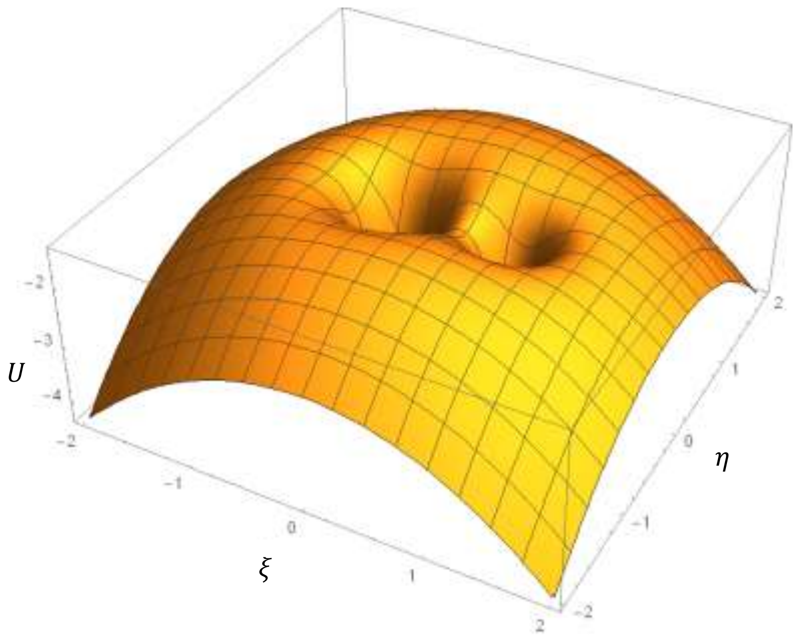

図　4

近接連星 ($\mu = 4/11$) の $\xi - \eta$ 面上でのポテンシャルU

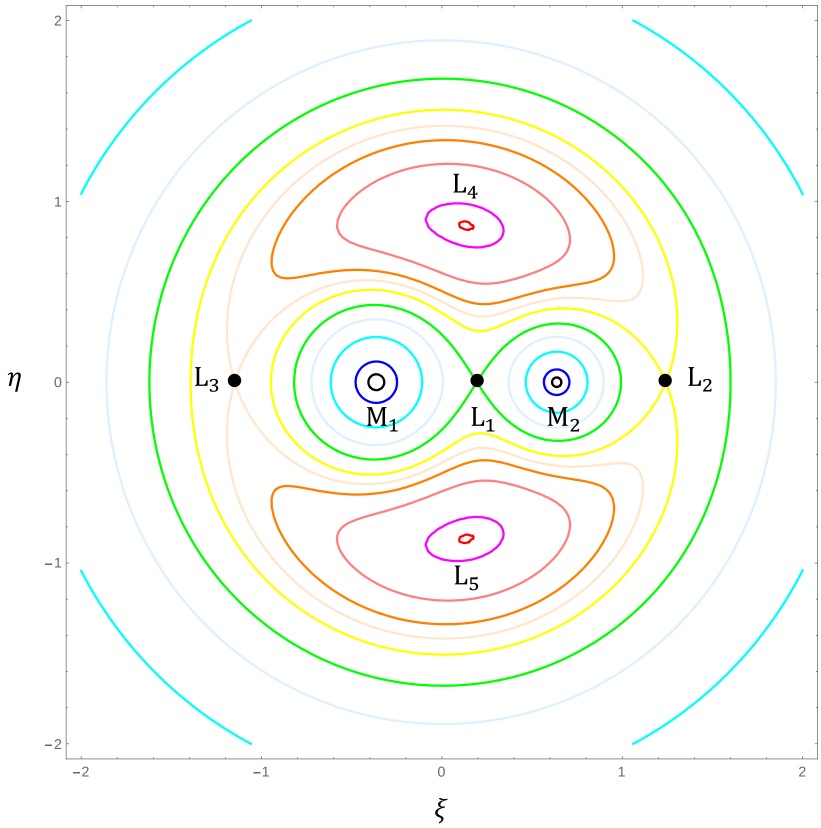

図　5

近接連星 ($\mu = 4/11$) の $\xi - \eta$ 面上での等ポテンシャル線

L_1：$\xi = 0.193653$，L_2：$\xi = 1.241178$，L_3：$\xi = -1.148150$

図 5 の L_1 を通る ∞ 字形の曲線は $U = -1.98203$ の等ポテンシャル面と $\xi - \eta$ 面の交線である。この等ポテンシャル面の内部領域をロッシュ・ローブ (Roche lobe) という。主星 M_1 が進化して赤色巨星になると，左側のロッシュ・ローブが巨星の外層で満たされ，M_1 の表面大気が L_1 を通って右側のロッシュ・ローブに溢れ出すようになる。この気体の流れを相互作用をしない粒子の流れで近似し，運動方程式⑫を解いてその軌道を求めれば図 6 のようになる。ただし初期条件は，$\xi = 0.2$， $\eta = 0$， $\dot{\xi} = 0$， $\dot{\eta} = 0$ とした。この軌道が伴星 M_2 の表面に達すれば，粒子は M_2 に吸収されてしまう。

このような質量の移動は M_1 と M_2 の恒星としての進化に大きな影響を与える。また，質量の移動とそれに伴う角運動量の移動は二重星の力学構造に変化を齎す。その結果，ロッシュ・ローブの大きさが変化し，それがまた質量の移動に跳ね返ってくる。このように近接連星の進化は極めて複雑である。その複雑な過程を追跡した研究論文の一例を次回に紹介する。

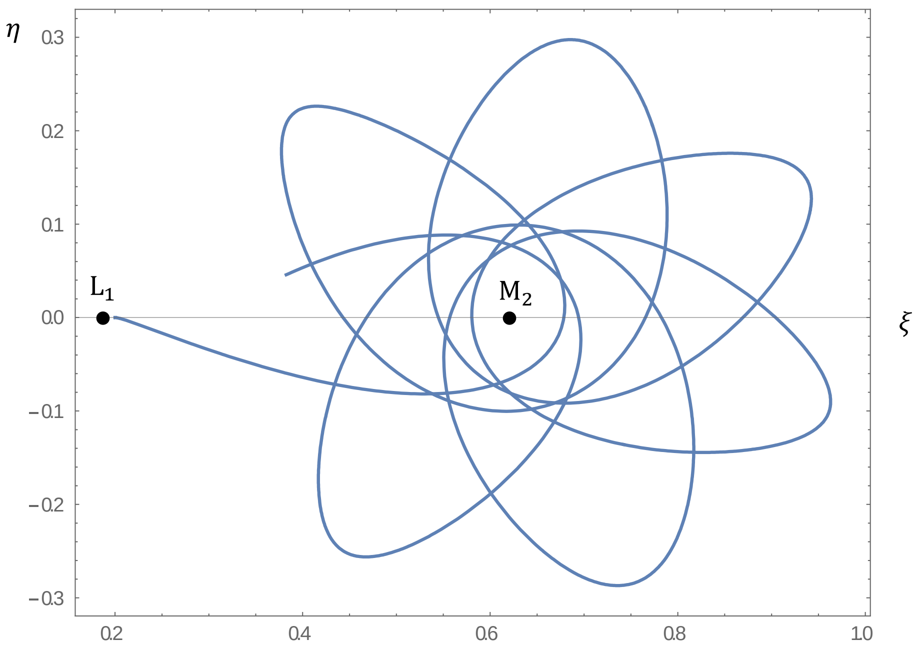

図 6

近接連星 ($\mu = 4/11$) の L_1 から溢れ出す粒子の軌道

L_1 : $\xi = 0.193653$ ， M_2 : $\xi = 0.636363$

§4 ラグランジュ点の安定性

$\xi-\eta$ 面で，ラグランジュ点(ξ_0 , η_0 , 0) の近傍での第三体 M_3 の運動を調べるために，

$$X=\xi-\xi_0 \quad (|X| \ll |\xi_0|)\,, \quad Y=\eta-\eta_0 \quad (|Y| \ll |\eta_0|) \tag{28}$$

とおき，ポテンシャル U を X と Y で展開して，

$$U=U_{00}+\frac{1}{2}\,U_{20}X^2+U_{11}XY+\frac{1}{2}\,U_{02}Y^2 \tag{29}$$

$$U_{ij}=\left(\frac{\partial^{i+j}\,U}{\partial X^i \partial Y^j}\right)_0$$

と近似する。ただし，U_{ij} はラグランジュ点での値である。このとき⑫より，

$$\ddot{X}=-U_{20}X-U_{11}Y+2\dot{Y}\,, \quad \ddot{Y}=-U_{11}X-U_{02}Y-2\dot{X} \tag{30}$$

が成り立つ。ここで，

$$X=A\exp(\mathrm{i}\Omega t)\,, \quad Y=B\exp(\mathrm{i}\Omega t) \tag{31}$$

とおき，㉚に代入すれば，

$$-\Omega^2 A=-U_{20}A-U_{11}B+2\mathrm{i}\Omega B\,, \quad -\Omega^2 B=-U_{11}A-U_{02}B-2\mathrm{i}\Omega A \tag{32}$$

を得る。これらより複素振幅 A と B の比を求めれば，

$$\frac{B}{A}=\frac{-U_{20}+\Omega^2}{U_{11}-2\mathrm{i}\Omega}=\frac{U_{11}+2\mathrm{i}\Omega}{-U_{02}+\Omega^2} \tag{33}$$

となり，右側の等式より特性方程式:

$$\Omega^4-(U_{20}+U_{02}+4)\Omega^2+\left(U_{20}\,U_{02}-{U_{11}}^2\right)=0 \tag{34}$$

を得る。Ω^2 に対する 2 次方程式㉞の解を Ω_1^2 , Ω_2^2 とすれば，㉚の一般解は，

$$\left.\begin{aligned} X&=A_{1+}\exp(\mathrm{i}\Omega_1 t)+A_{1-}\exp(-\mathrm{i}\Omega_1 t)+A_{2+}\exp(\mathrm{i}\Omega_2 t)+A_{2-}\exp(-\mathrm{i}\Omega_2 t) \\ Y&=B_{1+}\exp(\mathrm{i}\Omega_1 t)+B_{1-}\exp(-\mathrm{i}\Omega_1 t)+B_{2+}\exp(\mathrm{i}\Omega_2 t)+B_{2-}\exp(-\mathrm{i}\Omega_2 t) \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

と表される。複素振幅 $A_{j\pm}=|A_{j\pm}|\exp(\mathrm{i}\alpha_{j\pm})$ と $B_{j\pm}=|B_{j\pm}|\exp(\mathrm{i}\beta_{j\pm})$， $(j=1,2)$, の間には，$\pm\Omega_j$ を介して㉝が成り立つ。これらと初期条件:

$$t=0 \quad \text{のとき} \quad X=X_0\,, \quad Y=Y_0\,, \quad \dot{X}=\dot{X}_0\,, \quad \dot{Y}=\dot{Y}_0 \tag{36}$$

より，$A_{j\pm}$ と $B_{j\pm}$ が定まり，軌道が確定する。

もし，$\Omega_1^2>0$ かつ $\Omega_2^2>0$ であれば，

$$|A_{j+}|=|A_{j-}|=\frac{1}{2}\,|A_j|\,, \quad |B_{j+}|=|B_{j-}|=\frac{1}{2}\,|B_j|$$

$$\alpha_{j+}=\alpha_{j-}=\alpha_j\,, \quad \beta_{j+}=\beta_{j-}=\beta_j\,, \quad (j=1,2) \tag{37}$$

として，

$$\left.\begin{aligned} X&=|A_1|\cos(\Omega_1 t+\alpha_1)+|A_2|\cos(\Omega_2 t+\alpha_2) \\ Y&=|B_1|\cos(\Omega_1 t+\beta_1)+|B_2|\cos(\Omega_2 t+\beta_2) \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

となる。よって，このラグランジュ点は安定である。もし，Ω_1^2 と Ω_2^2 の片方または両方が負，あるいは両方とも複素数であれば，そのラグランジュ点は不安定となる。

特性方程式㉞を解くために，U_{ij} を求める。ここでは $\xi-\eta$ 面上の運動を考えているので，

$$U = - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} - \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2)$$

$$r_1 = \sqrt{(\xi + \mu)^2 + \eta^2}, \quad r_2 = \sqrt{(\xi + \mu - 1)^2 + \eta^2}$$

である。これらをξ, ηで微分すれば次式を得る。

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = (1-\mu)\frac{{r_1}^2 - 3(\xi+\mu)^2}{{r_1}^5} + \mu \frac{{r_2}^2 - 3(\xi+\mu-1)^2}{{r_2}^5} - 1 \qquad ㊴$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = (1-\mu)\frac{{r_1}^2 - 3\eta^2}{{r_1}^5} + \mu \frac{{r_2}^2 - 3\eta^2}{{r_2}^5} - 1 \qquad ㊵$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} = -3(1-\mu)\frac{(\xi+\mu)\eta}{{r_1}^5} - 3\mu \frac{(\xi+\mu-1)\eta}{{r_2}^5} \qquad ㊶$$

(I)　L_4とL_5の安定性

式㊴, ㊵, ㊶にラグランジュ点L_4とL_5の位置座標㉕:

$$\xi_0 = \frac{1}{2} - \mu, \quad \eta_0 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad r_1 = r_2 = 1$$

を代入すれば,

$$U_{20} = -\frac{3}{4}, \quad U_{02} = -\frac{9}{4}, \quad U_{11} = \pm\frac{3\sqrt{3}}{4}(2\mu - 1) \qquad ㊷$$

となり, 特性方程式㉞は,

$$\Omega^4 - \Omega^2 + \frac{27}{4}\mu(1-\mu) = 0 \qquad ㊸$$

となる。これを解けば,

$$\Omega^2 = \frac{1 \pm \sqrt{D}}{2}, \quad D = 1 - 27\mu + 27\mu^2 \qquad ㊹$$

を得る。$\mu > 0.5$の場合はM_1が伴星, M_2が主星となるので, $0 < \mu \leqq 0.5$と制限しても一般性を失わない。判別式Dが0となるのは,

$$\mu = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{23}{27}}\right) = 0.038520 \cdots \equiv \mu_c \qquad ㊺$$

のときである。よって,

$0 < \mu \leqq \mu_c$ の場合は, $0 < D < 1$で, $\Omega_1^2 > 0$, $\Omega_2^2 > 0$となり, L_4とL_5は安定,

$\mu_c < \mu \leqq 0.5$ の場合は, $D < 0$で, Ω_1^2とΩ_2^2は複素数となり, L_4とL_5は不安定となる。

たとえば太陽－惑星系では, 最大質量の木星の場合でも, $\mu \sim 0.001 < \mu_c$であるから, これらのL_4とL_5は安定である(図 7 参照)。惑星－衛星系でもL_4とL_5は安定であるが, 準惑星のプルートーとその衛星カロンの場合は$\mu \sim 0.1$であるので, そのL_4とL_5は不安定である。

図 4 から見てとれるように, L_4とL_5はポテンシャルUの極大点であるのに安定な平衡点となる場合があるのは, M_3にコリオリ力(㉚の右辺第3項)が働くからである。いまかりにL_4 (L_5)から離れる向きにM_3が動き出したとすると, コリオリ力のために, $\zeta > 0$の領域から見ればL_4 (L_5)のまわりを

時計まわりに回転し始める。そのとき回転方向の速度成分によるコリオリ力は L_4 (L_5) に向かう力となり，これが U の傾きによる力$(-\nabla U)$を上まわれば L_4 (L_5) の方に戻ることができ，L_4 (L_5) の近傍を回転し続ける。逆に，上まわることがなければ L_4 (L_5) から離れてしまうことになる。

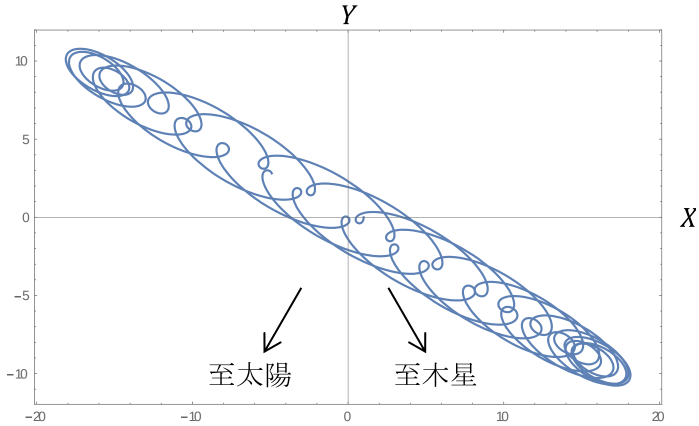

図　7

太陽－木星系$(\mu = 9.55 \times 10^{-4})$ のL_4 近傍における微小物体の運動

X 軸とほぼ$150°$ をなす方向に細長く伸びた領域内を物体は時計まわりに回転しながら往復運動する。原点が L_4 で，単位の長さは微小であればいくらであってもよい。

(II)　L_1，L_2，L_3 の安定性

式㊴，㊵，㊶に $\xi = \xi_0$，$\eta = \eta_0 = 0$ を代入すれば，

$$U_{20} = -(2C+1)\,,\quad U_{02} = C-1\,,\quad U_{11} = 0 \qquad ㊻$$

$$C = \frac{1-\mu}{|\xi_0+\mu|^3} + \frac{\mu}{|\xi_0+\mu-1|^3} \qquad ㊼$$

を得る。㊻を特性方程式㉞に代入すれば，

$$\Omega^4 - (C-2)\Omega^2 + (1+C-2C^2) = 0 \qquad ㊽$$

となる。これを解けば，

$$\Omega^2 = \frac{1}{2}\left\{(2-C) \pm \sqrt{D}\right\},\quad D = 9C^2 - 8C \qquad ㊾$$

を得る。

太陽－惑星系のように $\mu \ll 1$ の場合，$a = 1$ に注意して前篇の式⑭，⑮，⑯を用いれば，

$$L_1：\xi_0 = 1-\mu-l_1 \fallingdotseq 1-\mu-\left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} + \frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3} + \cdots$$

$$L_2：\xi_0 = 1-\mu+l_2 \fallingdotseq 1-\mu+\left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} + \frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3} + \cdots$$

$$L_3：\xi_0 = -1-\mu+l_3 \fallingdotseq -1-\mu+\frac{7}{12}\mu - \cdots$$

が成り立つ。よって，L_1，L_2，L_3 での C (式㊼) の値は，

$$L_1：C \fallingdotseq (1-\mu)\left|1-\left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3}\right|^{-3} + \mu\left|-\left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} + \frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3}\right|^{-3} \fallingdotseq 4+6\left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} \qquad ㊿$$

$$L_2：C \fallingdotseq (1-\mu)\left|1+\left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3}\right|^{-3} + \mu\left|\left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} + \frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3}\right|^{-3} \fallingdotseq 4-6\left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} \qquad ㊿51$$

$$\mathrm{L}_3：\ C \fallingdotseq (1-\mu)\ \left|-1+\frac{7}{12}\mu\right|^{-3} +\mu\left|-2+\frac{7}{12}\mu\right|^{-3} \fallingdotseq 1+\frac{7}{8}\mu \qquad ㊾$$

となる。これらを㊾に代入すれば，$\Omega_1^2 > 0$，$\Omega_2^2 < 0$ となるので，L_1，L_2，L_3 はいずれも不安定である。このとき，ラグランジュ点から M_3 までの距離が e 倍になる時間 T_e のおおよその値を求めよう。

L_1 と L_2 の場合は，㊿，51の右辺の μ を 0 として㊾に代入すれば，

$$\Omega_1 \fallingdotseq \pm 2.07,\quad \Omega_2 \fallingdotseq \pm 2.51\,\mathrm{i}$$

を得る。よって，

$$T_e = \frac{1}{|\Omega_2|} = \frac{1}{2.51}$$

となる。M_1 と M_2 の円運動の周期 T は，ここで採用した単位系では，

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi$$

である。太陽－地球系では周期が365日であるから，太陽－地球系でのT_eを日単位に変換すれば，

$$T_e = \frac{1}{2.51}\ \frac{365\ 日}{2\pi} \fallingdotseq 23\ 日$$

となる。これが前篇の入試問題に与えられていた L_1 付近に留まれる時間である。

L_3 の場合は，52を㊾に代入すれば，

$$\Omega_1 \fallingdotseq \pm 1,\quad \Omega_2 \fallingdotseq \pm\sqrt{\frac{21}{8}\mu}\,\mathrm{i}$$

を得る。よって，

$$T_e = \frac{1}{|\Omega_2|} = \sqrt{\frac{8}{21\mu}}$$

である。太陽－地球系では，$\mu \fallingdotseq 3\times 10^{-6}$ であるから，T_e を年単位で求めれば，

$$T_e = \sqrt{\frac{8}{21\times 3\times 10^{-6}}}\ \frac{1\ 年}{2\pi} \fallingdotseq 57\ 年$$

となる。よって，L_3 に打ち上げられた観測衛星は，その耐用年数を考えれば，準安定と見なすことができる。しかし，SF 作家がお気に入りの L_3 にある見えざる惑星 X は存在し得ない。

太陽と地球と観測衛星が一直線に並ぶと，L_1 と L_3 では通信に，L_2 では太陽光発電に支障を来たすので，わざと平衡点を外して，平衡点を中心とする細長い楕円軌道上を衛星が運行するように調整されている。そのためには不安定性に起因する軌道のずれをときどき修正しなければならない(図 8 参照)。

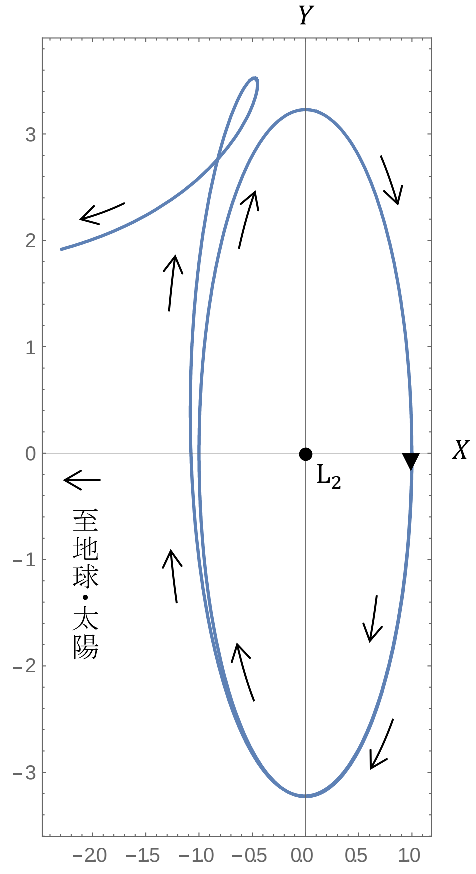

図 8

太陽－地球系 ($\mu = 3 \times 10^{-6}$) の L_2 近傍における微小物体の運動

ある特定の初期値を与えれば，Y 軸方向を長軸とする楕円軌道となるが，擾乱のために不安定となり，やがて L_2 から離れていく。図の軌道は，楕円軌道からわずかにずれた初期値から出発し，L_2 のまわりを1.5 回転したあと，L_2 から離れていく。

実際の擾乱は，月の引力が働いていること，地球の公転軌道が円ではなく楕円であること，X とYの 2 次以上の非線形力が働いていること，などによって生じる。

後篇の数値計算は Mathematica を用いて行った。

*

「熱中物理」に掲載されている論文の要約 は こちらへ