ラグランジュ点について（前篇）

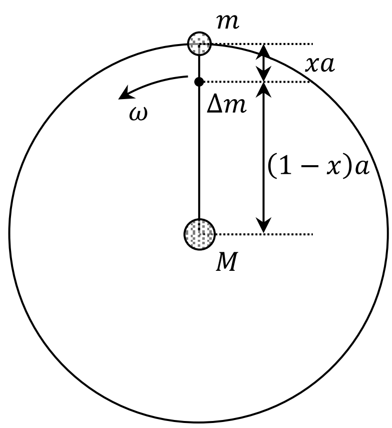
斉藤全弘

[1] 太陽－地球系のラグランジュ点 $\mathrm{L_1}$ の位置を力のつりあいの式と近似計算によって求めさせる問題が工学院大学(2003 年)に出題された。何のための問いなのか訳のわからない入試問題が多いなか, この問題は $\mathrm{L_1}$ に打ち上げられた探査機を主題として一つのまとまった文章になっている。少し長くなるが, その全文を以下に書き写す。

力学では, 2 個の質点が共通重心の周りを円運動するとき, 質量がこれらに比べて十分に小さい第 3 の質点もまた円運動をして互いの位置関係を変えないという特別な場合があり, この第 3 の質点が存在できる点はラグランジュ点とよばれ 5 個あることが知られている。

太陽と地球を 2 個の質点としたときの第 1 ラグランジュ点 (L1) は探査機が継続して観測するのに都合が良いので, 過去に何個かの探査機が投入されて来た。創世記を意味するジュネシスの名を冠した NASA の探査機は L1 の近くで観測を続けており太陽からの粒子を 2 年半にわたり収集し地球に持ち帰る計画である。

この点の位置について考察してみよう。太陽の質量をM , 地球の質量をm , 探査機の質量をΔm とする。M は m よりも十分大きいので, 簡単のため, 太陽は静止しているとし, 地球は太陽の周りを, 軌道半径 a , 角速度 ω の円運動をしているものとする。L1 は太陽と地球とを結ぶ線分上の点で, 地球と同じ周期で太陽の周りを公転できる点である。L1 は地球と太陽を $x:1-x$ に内分する地点であり, 探査機はそこに位置する。万有引力定数をG とする。



仮に, 地球も探査機も空間に静止しているとする。このとき, 探査機が太陽から受ける引力の大きさ $\boxed{\text{イ}}$ と地球から受ける引力の大きさ $\boxed{\text{ロ}}$ が等しいことになる。その関係から決まる点は地球から約 26 万 km にあり, これは月よりも地球に近い点である。すなわち月は地球よりも太陽からより大きな引力を受けているが, それでも地球の周りを安定に回れるのは, 次に見る地球の公転の効果による。

実際には, 地球や探査機は円運動をしている。さきに述べたように探査機は角速度 ω の円運動をしているので, L1 に固定した座標系で見ると, その遠心力の大きさは $\boxed{\text{ハ}}$ であり, これが $\boxed{\text{イ}}$ と $\boxed{\text{ロ}}$ の差に等しい。また, 地球の円運動に関しても遠心力と太陽からの万有引力とのつり合いを考えると, $\omega^2 = \boxed{\text{ニ}}$ となる。以上から, $n_1 = \boxed{\text{ホ}}$, $n_2 = \boxed{\text{ヘ}}$ を整数として, $M\{(1-x)^{n_1} - (1-x)^{n_2}\} = m\boxed{\text{ト}}$ が得られる。$\dfrac{m}{M}$ が小さいので, これには, x が1 に比べて小さい解が存在する。ここで, 一般にu の絶対値が1 よりも十分小さいとき$(1+u)^n = 1 + nu$と近似できることを用いると, 上の式から $x^3 = \boxed{\text{チ}}$ が得られ, ここに実際の値 $\left(a = 1.5 \times 10^8[\mathrm{km}]\,,\ \dfrac{m}{M} = 3 \times 10^{-6}\text{として良い。}\right)$を当てはめると地球から L1 までの距離は約

150 万 km となる。

実際には，L1 は不安定なつり合い点であり，また地球の軌道が円ではないこと，月などの他の天体からの引力により，L1 付近にとどまれるのは約23日である。ジュネシスはロケット噴射で軌道制御を行って2年半もの間，この付近に留まっている。

解答は容易で次のようになる。

(イ) $\boxed{\dfrac{GM\Delta m}{a^2(1-x)^2}}$ (ロ) $\boxed{\dfrac{Gm\Delta m}{a^2x^2}}$ (ハ) $\boxed{\Delta ma(1-x)\omega^2}$ (ニ) $\omega^2 = \boxed{\dfrac{GM}{a^3}}$

(ホ)，(ヘ)，(ト) 角速度 ω で回転する座標系から見たとき，探査機に働く力のつりあいより，

$$\frac{GM\Delta m}{a^2(1-x)^2} - \frac{Gm\Delta m}{a^2x^2} = \Delta ma(1-x)\omega^2 = \frac{GM\Delta m}{a^2}(1-x)$$

が成り立つ。両辺を $G\Delta m/a^2$ で割って移項すれば次式を得る。

$$M\{(1-x)^{\boxed{-2}} - (1-x)^{\boxed{1}}\} = m\boxed{x^{-2}}$$

(チ) $m \ll M$ であるから $x \ll 1$ である。よって，$(1-x)^{-2} \fallingdotseq 1+2x$ と近似できる。

これを上式に代入すれば次式を得る。

$$x^3 = \boxed{\frac{m}{3M}}$$

ジェネシス(Genesis) が回収されたのは 2004 年 8 月 9 日である。着地の衝撃を回避するためにパラシュートで降下中のカプセルをヘリコプターで捕獲回収する予定であったので，回収は昼間でなければならず，そのために L_1 から一旦 L_2 を経由して地球に戻る軌道が採用された。この帰還軌道に乗るまでは順調に進んだのであるが，カプセルの組立段階で加速度センサーを間違って逆向きに取り付けてしまったために，パラシュートが開かず，ユタ州の砂漠に激突してしまった。カプセルは真っ二つになり，太陽風粒子の収集基板は，野球ボールが当たった窓ガラスのように，粉々になってしまった。その破片を丁寧に拾い集め，時間をかけて衝突による汚染を除去したあと，粒子の成分分析が行われた。その結果，酸素の同位体 ^{16}O の比率が地球より高いことなどがわかり，所期の目的はほぼ達成されたという。

[2] 図 1 に示すように，ラグランジュ点(Lagrangian Points) L_1 , L_2 , L_3 は太陽 S と地球 E を通る直線上にあり，ラグランジュ点 L_4 , L_5 は地球の軌道面上で△ L_4SE，△ L_5SE が正三角形をなす位置にある。太陽と地球の重心 G のまわりに太陽･地球と同じ角速度で回転する座標系から見たとき，L_1 , L_2 , L_3 は不安定な平衡点であり，L_4 , L_5 は安定な平衡点である。

太陽－地球系以外にも，太陽と各惑星から成る系や惑星とその衛星から成る系のそれぞれに 5 つのラグランジュ点がある。

探査機ジェネシスの他にも，太陽－地球系の L_1 と L_2 にラグランジュ点の特性を生かしたさまざま

な天体観測衛星が打ち上げられている。今後も，2018 年にL_2へ打ち上げられる James Webb Space Telescope をはじめとして，数多くの観測衛星の打ち上げが計画されている。またいずれL_3にも太陽活動の監視衛星が打ち上げられるにちがいない。

さらに遠い将来，太陽－地球系のL_5に宇宙植民地を建設するという SF 的な話もあるが，現在のところでは，太陽－惑星系および惑星－衛星系のL_4とL_5に留まっている小惑星(トロヤ群と呼ばれている)や宇宙塵の発見および観測に関心が向いている。

問題文にあるように，不安定なラグランジュ点 L_1 , L_2 , L_3 にある観測衛星は，平衡点から離れて行かないように，時々軌道修正を行う必要がある。それに必要な推進力はほんのわずかである。

これを逆に利用すれば，ある不安定なラグランジュ点に達した宇宙船の軌道を，わずかな推進力で大きく変えることが可能となる。したがって，ある系のラグランジュ点と別の系のラグランジュ点を繋ぐ軌道があれば，太陽系内の移動に要する燃料を大幅に節約することができる。そして，実際そのような軌道が存在することが示され，ITN(Interplanetary Transport Network) と呼ばれるようになった。

ジェネシスの帰還軌道もその一つである。この例が示すように，ITN のなかには惑星や衛星に衝突する軌道がある。木星に衝突したシューメイカー・レヴィ彗星や恐竜絶滅の原因になったと考えられている小惑星の軌道がこのような衝突軌道であった可能性があるらしい。

この他にも ITN に関連する興味深い話題が，Ross,S.D.(2006),American Scientist 94 :230-237 に取り上げられている。

ラグランジュ点そのものに関する定量的な記述は，天体力学の専門書以外で見かけることはほとんどないので，本稿ではまずL_1～ L_5 の位置について高校生でも理解できる定量的な解説をする。

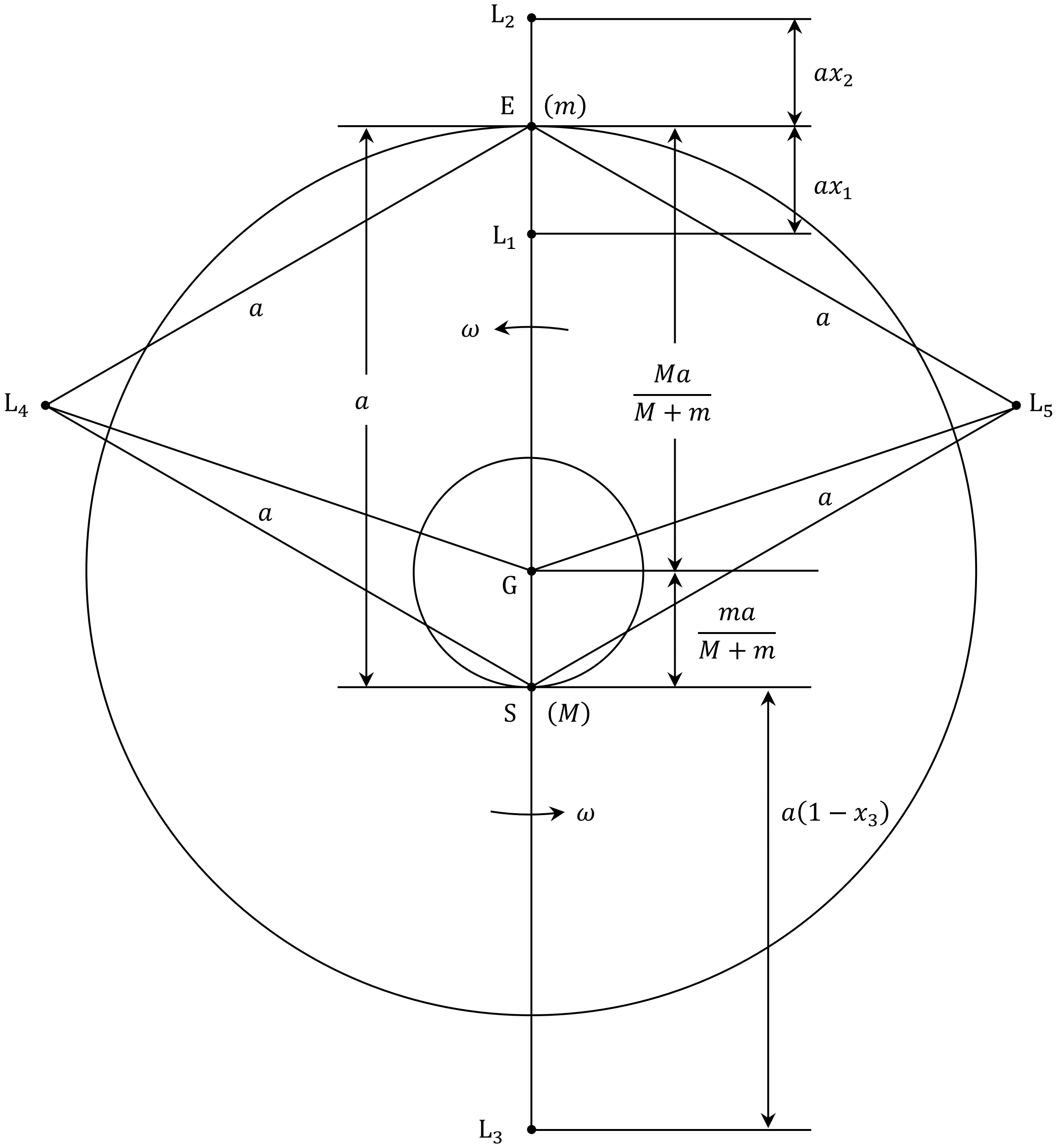


図　1

[3]　はじめに，ラグランジュ点 L_1 , L_2 , L_3 の位置の求め方について述べる。

太陽－地球系の L_2 の位置は前述の入試問題と同じ近似計算によって求めることができるが，L_3 の位置を求めるときには重心 G と太陽 S の距離を 1 次の微小量として考慮しなければならない。そこでまず一般的な状況で L_1 , L_2 , L_3 の位置が満たさなければならない方程式を導出し，次に $m \ll M$ として，近似計算によってその方程式を解くことにする。

図 1 に示すように，$\overline{\mathrm{SE}} = a$ として，

$$\overline{\mathrm{L_1E}} = ax_1 \quad , \quad \overline{\mathrm{L_2E}} = ax_2 \quad , \quad \overline{\mathrm{L_3S}} = a(1 - x_3)$$

とおき，重心 G のまわりの太陽 S と地球 E の回転角速度を ω とする。この角速度でG のまわりを回転する座標系から見たとき，地球に働く力のつりあいより，

$$m \ \frac{Ma}{M+m} \ \omega^2 = \frac{GMm}{a^2} \qquad \therefore \omega^2 = \frac{G(M+m)}{a^3}$$

を得る。次に，L_1 , L_2 , L_3 にある探査機 $\left(\text{質量}\Delta m\right)$ に働く力のつりあいより，

$$\mathrm{L}_1 \ : \ \frac{GM\Delta m}{a^2(1-x_1)^2} - \frac{Gm\Delta m}{a^2x_1^2} = \Delta m \ a \ \left(\frac{M}{M+m} - x_1\right) \ \omega^2$$

$$= \frac{G(M+m)\Delta m}{a^2}\left(\frac{M}{M+m} - x_1\right) \qquad ①$$

$$\mathrm{L}_2 \ : \ \frac{GM\Delta m}{a^2(1+x_2)^2} + \frac{Gm\Delta m}{a^2x_2^2} = \Delta m \ a \ \left(\frac{M}{M+m} + x_2\right) \ \omega^2$$

$$= \frac{G(M+m)\Delta m}{a^2}\left(\frac{M}{M+m} + x_2\right) \qquad ②$$

$$\mathrm{L}_3 \ : \ \frac{GM\Delta m}{a^2(1-x_3)^2} + \frac{Gm\Delta m}{a^2(2-x_3)^2} = \Delta m \ a \ \left(1 + \frac{m}{M+m} - x_3\right) \ \omega^2$$

$$= \frac{G(M+m)\Delta m}{a^2}\left(1 + \frac{m}{M+m} - x_3\right) \qquad ③$$

が成り立つ。①，②，③の両辺を$G\Delta m/a^2$ で割れば，

$$\mathrm{L}_1 \ : \ M(1 - x_1)^{-2} - mx_1^{-2} = M - (M + m)x_1 \qquad ④$$

$$\mathrm{L}_2 \ : \ M(1 + x_2)^{-2} + mx_2^{-2} = M + (M + m)x_2 \qquad ⑤$$

$$\mathrm{L}_3 \ : \ M(1 - x_3)^{-2} + m(2 - x_3)^{-2} = M + 2m - (M + m)x_3 \qquad ⑥$$

となる。さらに，④，⑤，⑥の両辺を$(M + m)$ で割って，$\mu = m/(M + m)$ とおき，整理すれば，

$$\mathrm{L}_1 \ : \ x_1^5 - (3 - \mu)x_1^4 + (3 - 2\mu)x_1^3 - \mu x_1^2 + 2\mu x_1 - \mu = 0 \qquad ⑦$$

$$\mathrm{L}_2 \ : \ x_2^5 + (3 - \mu)x_2^4 + (3 - 2\mu)x_2^3 - \mu x_2^2 - 2\mu x_2 - \mu = 0 \qquad ⑧$$

$$\mathrm{L}_3 \ : \ x_3^5 - (7 + \mu)x_3^4 + (19 + 6\mu)x_3^3 - (24 + 13\mu)x_3^2 + (12 + 14\mu)x_3 - 7\mu = 0 \qquad ⑨$$

を得る。これらをラグランジュの 5 次方程式という。

$m \ll M$ の場合には，x_1 , x_2 , $x_3 \ll 1$ であるので，近似式

$$(1 \pm x)^{-2} \fallingdotseq 1 \mp 2x \,, \qquad (2 - x)^{-2} = 2^{-2}\left(1 - \frac{x}{2}\right)^{-2} \fallingdotseq \frac{1}{4} \ (1 + x)$$

を用いて，④，⑤，⑥を書き換え，x_1 , x_2 , x_3 を求めれば，

$$\mathrm{L}_1 \ : \ M(1 + 2x_1) - mx_1^{-2} \fallingdotseq M - (M + m)x_1$$

$$\therefore \quad x_1 \fallingdotseq \left(\frac{\frac{m}{M}}{3+\frac{m}{M}}\right)^{\frac{1}{3}} \fallingdotseq \left(\frac{m}{3M}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad ⑩$$

$$\mathrm{L}_2 \ : \ M(1 - 2x_2) + mx_2^{-2} \fallingdotseq M + (M + m)x_2$$

$$\therefore \quad x_2 \fallingdotseq \left(\frac{\frac{m}{M}}{3+\frac{m}{M}}\right)^{\frac{1}{3}} \fallingdotseq \left(\frac{m}{3M}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{11}$$

$$\mathrm{L_3} \ : \ M(1+2x_3) + \frac{m}{4}\ (1+x_3) \fallingdotseq M + 2m - (M+m)x_3$$

$$\therefore \quad x_3 \fallingdotseq \frac{2m-\frac{1}{4}m}{3M+\frac{5}{4}m} \fallingdotseq \frac{7m}{12M} \tag{12}$$

を得る。まとめれば,

$$\overline{\mathrm{L_1E}} \fallingdotseq a\ \left(\frac{m}{3M}\right)^{\frac{1}{3}} \ , \quad \overline{\mathrm{L_2E}} \fallingdotseq a\ \left(\frac{m}{3M}\right)^{\frac{1}{3}} \ , \quad \overline{\mathrm{L_3S}} \fallingdotseq a\ \left(1-\frac{7m}{12M}\right) \tag{13}$$

となる。太陽－地球系の具体的な数値

$a = 1.5 \times 10^8$ km (これを天文単位という) ， $M = 2.0 \times 10^{30}$ kg ， $m = 6.0 \times 10^{24}$ kg

を代入すれば,

$\overline{\mathrm{L_1E}} \fallingdotseq \overline{\mathrm{L_2E}} \fallingdotseq 1.5 \times 10^6$ km ， $\overline{\mathrm{L_3S}} \fallingdotseq 1.5 \times 10^8$ km

となる。地球から$\mathrm{L_1}$, $\mathrm{L_2}$ までの距離は月までの距離の3.9 倍である。因みに,

$$\overline{\mathrm{GS}} = \frac{m}{M+m}\ a = 4.5 \times 10^2 \ \mathrm{km}$$

で, これは太陽の半径 7.0×10^5 km の0.064 % である。

ついでに, $m \ll M$ でない場合についても述べておこう。この場合, x_1 , x_2 , x_3 を求めるには 5 次方程式 ⑦, ⑧, ⑨を解かねばならない。昔は次のような計算をしていた。たとえば x_1 の場合,

$$x_1 = \ a_1 \left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{1}{3}} + a_2 \left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{2}{3}} + a_3 \left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{3}{3}} + \cdots\cdots \qquad , \ \mu = \frac{m}{M+m} < 1$$

と展開し, これを⑦に代入して係数 a_i を求めると,

$$a_1 = 1 \ , \quad a_2 = -\frac{1}{3} \ , \quad a_3 = -\frac{1}{9} \ , \ \cdots\cdots$$

となる。よって,

$$x_1 = \left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{9}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{3}{3}} + \cdots\cdots \tag{14}$$

と表される。同様にして,

$$x_2 = \left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{9}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{3}{3}} + \cdots\cdots \tag{15}$$

$$x_3 = \frac{7}{12}\,\mu - \frac{1127}{20736}\,\mu^3 + \cdots\cdots \tag{16}$$

を得る。高次の項の係数を手で計算するのはたいへんである。現在では, μ の値が与えられれば, パソコンで簡単に 5 次方程式の数値解を求めることができるので, 級数展開による解法は廃れてし

まった。

$M=4m\ \ (\mu=0.2)$ の場合について，質量 m の星と重心の間隔をいくつかの区間に分割し，各区間の両端における万有引力と遠心力の合力の符号を調べることによって，$\mathrm{L_1}$ が存在する区間を特定する問題が名古屋大学 (2008 年) に出題された。もちろん，2 つの星の間には平衡点が 1 つしかないことを仮定している。区間の幅を狭くしていけば，$\mathrm{L_1}$ の位置を高い精度で求めることができる。$\mathrm{L_2}$, $\mathrm{L_3}$ についても同様である。因みに，このような方法で $\mu=0.2$ の場合について計算すると，

$$x_1=0.36192404\cdots,\quad x_2=0.47104869\cdots,\quad x_3=0.11716053\cdots$$

となる。

[4] つぎに，ラグランジュ点 $\mathrm{L_4}$, $\mathrm{L_5}$ が平衡点であることを示す。

図 2 のように，$\overline{\mathrm{L_4G}}=\overline{\mathrm{L_5G}}=l$ ，$\angle\mathrm{GL_4S}=\angle\mathrm{GL_5S}=\theta$ とおけば，正弦定理より，

$$\frac{\sin 60^\circ}{l}=\frac{\sin\theta}{\frac{m}{M+m}a}=\frac{\sin(120^\circ-\theta)}{a}$$

が成り立つ。これらより，

$$l=\frac{\sqrt{3}ma}{2(M+m)\sin\theta}\ ,\qquad \tan\theta=\frac{\sqrt{3}\,m}{2M+m} \qquad ⑰$$

を得る。重心 G のまわりに角速度 ω で回転する座標系から見たとき，$\mathrm{L_4}$, $\mathrm{L_5}$ にある単位質量の物体に働く力はつりあいの式を満たしていることを示す。まず，$\mathrm{GL_4(GL_5)}$ に垂直な方向の合力は，

$$\frac{GM}{a^2}\sin\theta-\frac{Gm}{a^2}\sin(60^\circ-\theta)=\frac{G}{a^2}\left\{M\sin\theta-m\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right)\right\}$$

$$=\frac{G\cos\theta}{2a^2}\left\{(2M+m)\tan\theta-\sqrt{3}\,m\right\}=0\qquad (\because ⑰)$$

であり，$\mathrm{GL_4(GL_5)}$ 方向の合力も，

$$l\omega^2-\frac{GM}{a^2}\cos\theta-\frac{Gm}{a^2}\cos(60^\circ-\theta)$$

$$=\frac{\sqrt{3}\,m\,a}{2(M+m)\sin\theta}\frac{G(M+m)}{a^3}-\frac{G}{a^2}\left\{M\cos\theta+m\left(\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)\right\}$$

$$=\frac{G}{2a^2}\left(\frac{\sqrt{3}\,m}{\sin\theta}-2M\cos\theta-m\cos\theta-\sqrt{3}\,m\sin\theta\right)$$

$$=\frac{G}{2a^2}\left\{\frac{\sqrt{3}\,m}{\sin\theta}\left(1-\sin^2\theta\right)-\left(2M+m\right)\cos\theta\right\}$$

$$=\frac{G\cos^2\theta}{2a^2\sin\theta}\left\{\sqrt{3}\,m-(2M+m)\tan\theta\right\}=0\qquad (\because ⑰)$$

である。よって，$\mathrm{L_4}$, $\mathrm{L_5}$ は平衡点である。

この計算では近似式を用いていないので，任意の M と m に対して $\mathrm{L_4}$ と $\mathrm{L_5}$ は平衡点になっていることがわかる。

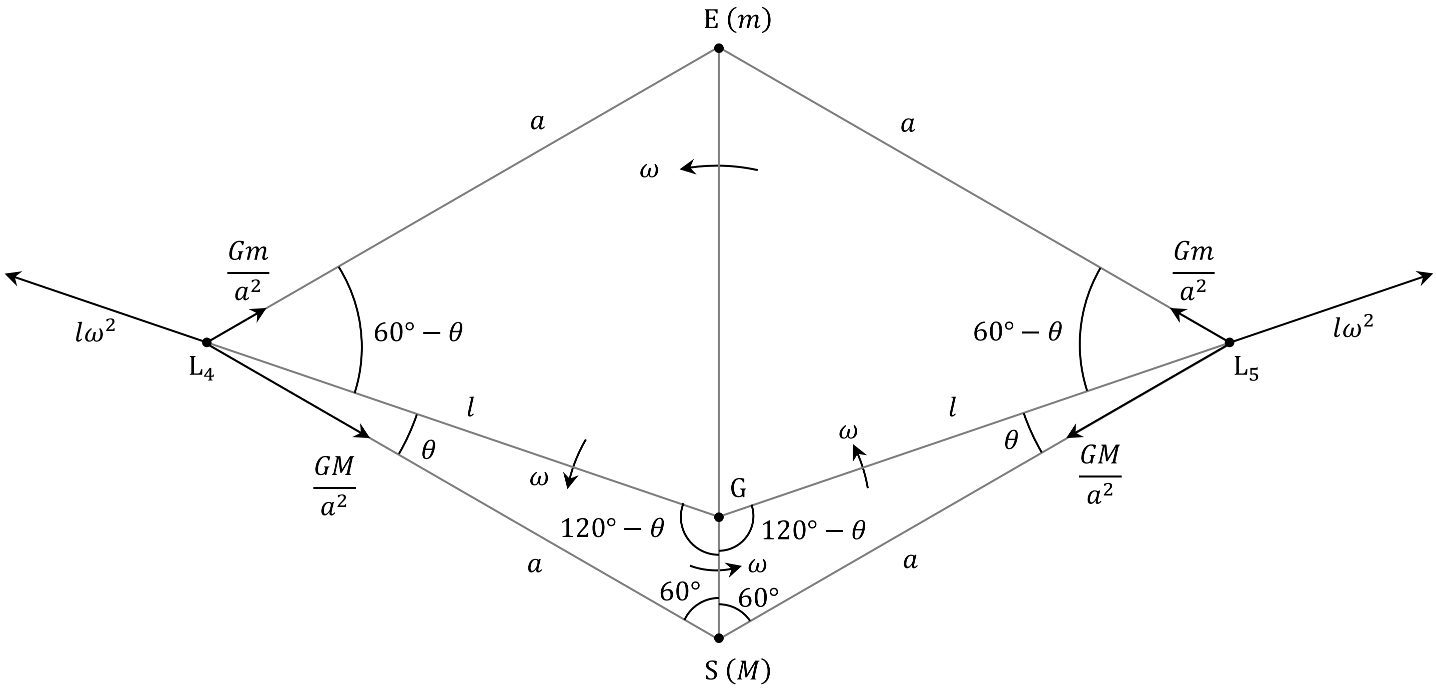


図　2

「熱中物理」に掲載されている論文の要約　は　こちらへ