

## クントの実験に関してもまだによくわかっていないこと (4)

### ～アンドラーデの実験の要約と未解決問題 I～

齊藤 全弘

#### §1 はじめに

クントの実験でなぜ微粒子の縞模様が形成されるのかについて、2015年の時点で知られていることを、松田・野村・鎌倉が文献1の総合報告で解説している。理論研究や実証実験は数多くあるのだが、結論を一言で言えば、縞模様形成の原因はいまだによくわかっていないのである。

縞模様の形成に関与していると思われる次の物理量：

- ① 音波の定常波の振動数と振幅
- ② 微粒子の大きさ・形・密度とその個数
- ③ 音響管の長さと断面の形・大きさおよび内壁の物理性質
- ④ 封入された気体の密度・圧力・温度と粘度

のすべてが与えられているときに、どのような縞模様が生じるのかを予測することができ、実際に実験をしたときに予測通りの結果が得られれば、よくわかっているとと言える。しかし、関与する物理量の多さと必要とされる理論計算の難しさを考えれば、解決はまだまだ先のようである。いまやるべきことは、縞模様の形成に関わっていると思われる素過程を詳細に調べ上げることである。なかでも、音響管内に発生する循環流 (circulation) と微粒子のまわりに生じる渦 (vortex) は重要である。これらは1931年にアンドラーデ (文献2) によって発見されたのであるが、学术论文に引用されることはあっても、物理教育に携わる人たちにその重要性がよく知られている、とは言えないようである。本稿では2回に亘ってアンドラーデの研究成果を紹介する。

なお、上記の循環流と渦は現在の用語では音響流 (acoustic streaming) であるが、本稿では敢えて原論文の用語のままとした。

#### §2 トレイサーとしてタバコの煙を用いる理由

循環流や渦を可視化するためには、空気の流体粒子の動きを追跡する微粒子 (追跡子, tracer) が必要となる。アンドラーデは実験データを基にした理論計算によって、タバコ粒子が理想的な追跡子に近いことを示した。

動粘性係数  $\nu$  の流体中を角振動数  $n$  で単振動する半径  $R$  の球にはたらく粘性抵抗力の大きさ

$Z$  は、その速度が  $V$ 、加速度が  $\frac{dV}{dt}$  であるとき、

$$Z = \frac{m}{2} \left| - \left( 1 + \frac{9}{2KR} \right) \frac{dV}{dt} - \frac{9}{2KR} n \left( 1 + \frac{1}{KR} \right) V \right| \quad (1)$$

で与えられる。ただし、 $K = \sqrt{\frac{n}{2\nu}}$  で、 $m$  は球と同じ体積の粘性流体の質量である (文献3)。

逆に、球に対して角振動数  $n$  で単振動する粘性流体が球におよぼす粘性力の大きさは、球から離れたところで、球に対する流体の速度が  $V$ 、加速度が  $\frac{dV}{dt}$  であるとき、式 (1) の  $Z$  に等しい。このような力をおよぼし合うとき、定常状態における球と流体の速度振幅  $w_0$  と  $v_0$  の比は、次式で与えられる。

$$\frac{w_0}{v_0} = \left( \frac{1+3b+\frac{9}{2}b^2+\frac{9}{2}b^3+\frac{9}{4}b^4}{a^2+3ab+\frac{9}{2}b^2+\frac{9}{2}b^3+\frac{9}{4}b^4} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

ただし、流体の密度に対する球の密度の比を  $\sigma$  として、

$$a = \frac{2\sigma+1}{3}, \quad b = \frac{1}{KR} \quad (3)$$

である (脚注 1)。

空気とタバコ粒子の相互作用の場合、 $v = 1.48 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$  で、タバコ粒子の密度は水の密度に近いと考えられるので、 $\sigma = 820$  としてよい。したがって、 $a = 547$  となる。タバコ粒子の半径  $R$  は、空気中を落下するときの終端速度から推定できる。対流が生じないように一様な温度に保った管に、タバコの煙を吹き込んでしばらく放置すると、煙がたなびき、鮮明な頭頂部がゆっくり降下する。その降下速度をタバコ粒子の終端速度とする。4 回の測定値の平均値は  $2.8 \times 10^{-5} \text{ m/s}$  で、これから求まる  $R$  の値は  $5 \times 10^{-7} \text{ m}$  である。

これらの値を用いれば、式 (2) より次の結果を得る。

$$f = \frac{n}{2\pi} = 2000 \text{ Hz}, \quad 1200 \text{ Hz}, \quad 600 \text{ Hz} \quad \text{のとき,}$$

$$\frac{w_0}{v_0} = 0.9989, \quad 0.99955, \quad 0.99987$$

ちなみに、 $R = 1.55 \times 10^{-5} \text{ m}$  で密度が  $2.4 \times 10^2 \text{ kg/m}^3$  のコルク粒子の場合には、

$$f = 850 \text{ Hz}, \quad 134 \text{ Hz}, \quad 120 \text{ Hz} \quad \text{のとき,}$$

$$\frac{w_0}{v_0} = 0.5, \quad 0.945, \quad 0.955$$

$$(0.294, \quad 0.849, \quad 0.871)$$

である。これからわかるように、 $f \leq 1200 \text{ Hz}$  のときには、タバコ粒子は理想的な追跡子に近い。しかし、超音波のように振動数が大きいときにはそうとは言えず、タバコ粒子のような微粒子でも、空気の相対運動による影響を考慮しなければならない。なお、コルク粒子に対するアンドラーデの計算値は間違っており、( ) 内の数値が正しい。

(脚注 1) 式 (1) を導出するにはナビエ・ストークス方程式を解かねばならず、バセットの計算式を一つ一つ追っていくだけでも時間がかかる。式 (2) の導出は初等的であるが、長い式の計算を

しなければならない。アンドラーデは  $b = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{v}{\pi n}}$  としているが、式 (1) の  $n$  は角振動数である

から  $b = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{2v}{n}}$  である。

### §3 音響管内の循環流

アンドラーデは図1のような実験装置で循環流を観察し、その流線の形を求めた。まず、円筒ガラス管の左端に音源の平面振動板を取り付ける。そのとき、振動板の振動がガラス管の切断面に直接伝わらないように、細心の注意をしている。つぎに右端をガラス板で閉じ、その右側から光を照射したときに、管軸を含む水平面にだけ光が当たるようにスリット板を取り付ける。管内には空気とタバコの煙だけが封入されている。写真撮影用の強い光をスリットに照射すると、光のエネルギーを吸収した水平面とその周囲の間に温度差が生じて対流が発生し、循環流が乱される。それを防ぐために、円筒ガラス管は一樣な温度の水槽内に設置されている。水槽の大きさや円筒ガラス管との位置関係は論文に書かれていない。図1は筆者が推測して描いたものである。論文に書かれている音源と光源の詳細については省略する。

スリットに光を当て、管内に基本振動の気柱共鳴が生じるように振動数を調節すると、図1の上面図に描かれているような空気の循環流が発生し、タバコの煙によってその流線が見えるようになる(脚注2)。管壁に近いところでは定常波の腹から節に向かって流れ、節の近くで反転し、管軸近傍では節から腹に向かって流れる(脚注3)。その他の領域でも図1のような流線に沿って矢印の向きに流れる。

振動数を $N$  ( $N = 2, 3, \dots$ ) 倍にすれば、図1のような4つ組の循環流が管内に $N$ 個見られるようになる。アンドラーデは $N = 7$ までそれを確認している。ただし、 $N = 1$ の場合については記述がない。

図1に描かれた2次元の循環流を管軸( $x$ 軸)のまわりに1回転させれば、3次元の循環流を得る。スリット板を管軸のまわり回転させれば、管軸とスリットを含む平面内での循環流を見ることができるはずだが、それについての記述はない。

図1に描かれた流線は概念図であって正確なものではない。アンドラーデは巧妙な方法を用いて正確な流線の形を求めている。水面の上方から流線の写真を撮ったあと、タバコの煙を排除し、方眼を刻んだ真鍮板を流線が見えていた位置に差し込み、流線の写真を撮ったときと同じ状況にして方眼の写真を撮る。それら2つの写真を見比べて流線の形を求めるのである。求められた流線は、レイリー(文献4)が理論的に導出した流線と完全に一致しているとは言えないが、かなりよく似ている。音響流に関する理論研究の嚆矢となったレイリーの歴史的な論文の概要を後の(補足)に与えておく。

---

(脚注2) 定常波がないときにはタバコの煙は管内に一樣に充満しているのに、気柱が共鳴を起こすと、タバコ粒子はいくつかの特定の流線に集まり、その流線が目に見えるようになるらしい。アンドラーデはこの現象の原因となりうる仮説を提唱しているが、定量的にそれを証明した人はまだいないようである。

(脚注3) 文献1の144頁には循環流が逆向きに流れるように書いてあるが、それは間違いで、執筆者たちは勘違いをしている。



#### §4 障害物の周りの渦運動

音響管が共鳴しているとき、管内に障害物があると、その周りに渦ができる。図2は、その渦を観察するためにアンドラーデが考案した実験装置の模式図である。音響管の中央付近は断面が正方形(3.7 cm × 3.7 cm)で長さが16 cmのガラス管、両側は内径が3.5 cmの円筒ガラス管になっており、両者は断面が正方形から円へなめらかに変化する真鍮の管で繋がれている。中央付近を角筒管にしたのは、管壁の曲がりによって渦の形が歪められるのを防ぐためである。管内の温度を一様にするために、円筒管を同軸の円筒ガラス管で囲み、その隙間に水を流している。角筒管

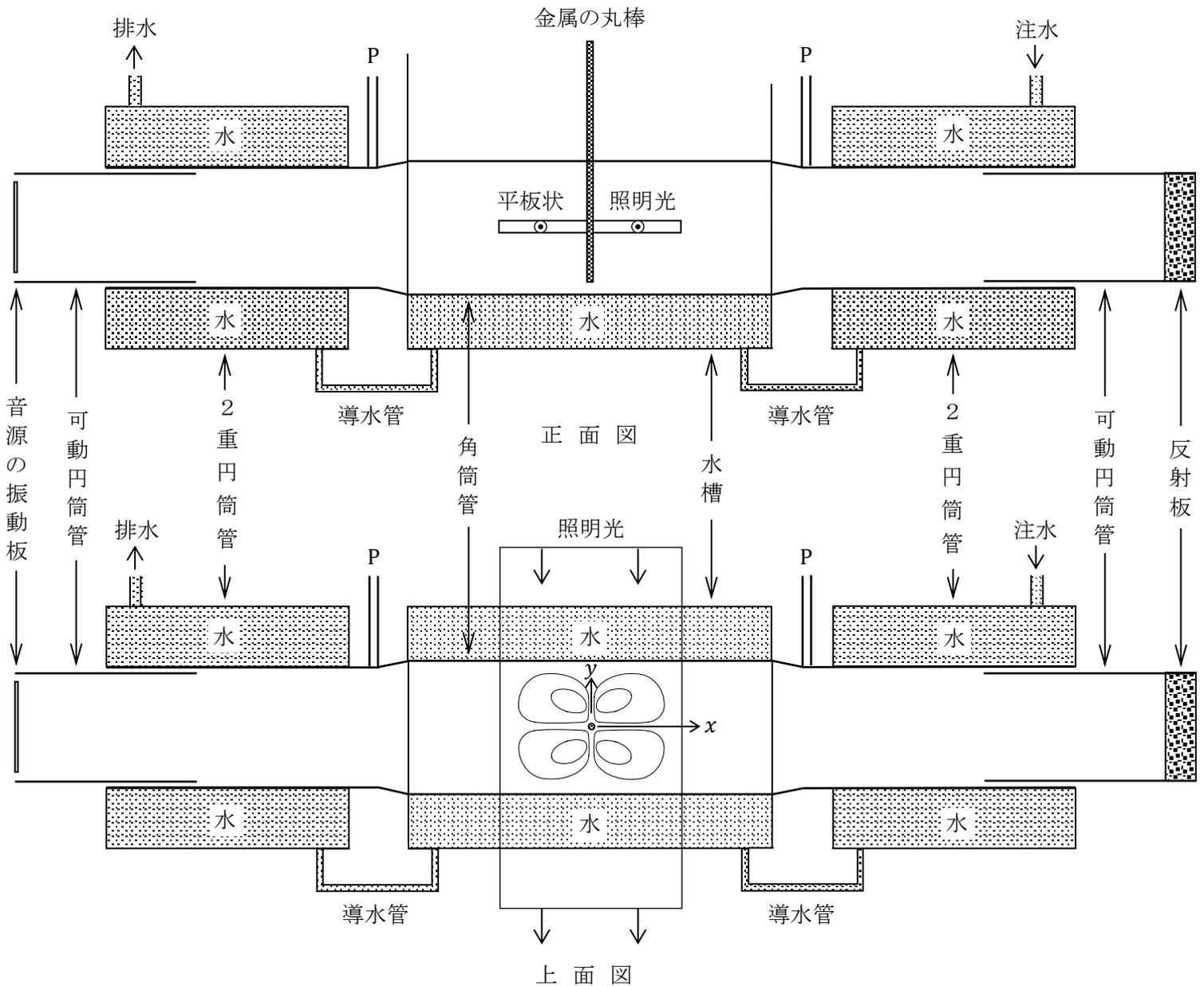


図2 障害物の周りにできる渦を観察するための実験装置の模式図

は水槽内に設置されており、その底面と2つの側面が同軸円筒管の隙間を流れている水と同じ水に接触するように、3つの管は導水管で繋がれている。右側の円筒には、真鍮円板で右端を閉じられた別の円筒ガラス管が差し込まれている。左側の円筒にも同様の円筒ガラス管が差し込んであり、その左端に音源の振動板が取り付けられている。これらの円筒管を横すべりさせることによって、角筒管内の任意の位置に定常波の腹や節を移動させることができる。角筒管（アンドラーデは箱と呼んでいる）の上面は取り外しが可能で、その中央に穴が開けられている。その穴に障害物の役割をする金属の丸棒を差し込んだり、管内に鋼球を設置するための器具を取り付けたりすることができる。

図2には描かれていないスリットを通った照射光は、幅が5~6cm、厚さが数mmの平板状の光線で、通常は図2の-y方向に照射されるが、角筒管の下に設置された鏡を使って管内の任意の断面（特に鉛直断面）を照射することもできる。塩化カルシウムを装填したタバコパイプPを通して乾燥したタバコの煙を管内に充満させ、管内の気柱を共鳴させると、図2の上面図に描かれているような4つの渦が障害物の周りに生じる。この渦に関してアンドラーデが得た実験結果を以下に記す。

#### (1) 障害物が金属の丸棒の場合

音源の振動数を一定にして管内に定常波を発生させた状態で、両側の可動円筒管を横すべりさせ、定常波の腹が丸棒の位置にくるようにする。このとき音の強さが適当であれば、図3のような渦が丸棒の周りにできる。渦の流線に沿って流体粒子が移動する向きは、図1の循環流の向きと図4から類推できるように、図3の矢印の向きである。丸棒と定常波の対称性より、4つの渦の形は図3のx軸とy軸に関して対称となる。

(a) 定常波の振動数と振幅を変えないで、丸棒の直径 $d$ を変えると「渦の大きさが影響を受ける」とだけアンドラーデは記している。 $d$ を4.75mm→2.37mm→1.59mmと変化させたときの渦の写真を見ると、渦の存在する領域が小さくなるように見えるが、管壁の位置がよくわからないので明確ではない(脚注4)。なお、 $d = 0.081$ mmの金属線の周りにも渦が生じると書かれている。

(b) 定常波の振動数と丸棒の直径を変えないで、音の大きさを変えると、次のような変化が見られる。たとえば、 $d = 2.37$ mmの場合、 $f = 512$ Hzで共鳴しているとき、大音量では障害物の周りには循環流による流れとなり、渦発生の徴候は見られるもののきちんとした渦はできない。音量を下げると循環流が弱まり、渦が発生するようになる。さらに音量を下げると、渦領域の大きさは減少するが鮮明な渦が見られる。もっと音量を下げると、渦内の動きが遅くなり、渦は小さくなるとともに形が不規則になる。そして最終的には消滅してしまう。

逆に、音量を上げていって、渦が出現するときの変位振幅 $a$ の閾値については次節で扱う。

(c) 気柱の長さを変えずに振動数を少し変化させると、定常波の腹は丸棒の位置からずれる。その結果丸棒の位置での音の大きさは小さくなり、(b)で述べたことに帰着する。

---

(脚注4) 渦の大きさが、音響管と障害物の大きさおよび定常波の振動数・強度とどのような関係にあるのか、定量的には何もわかっていない。

しかしそのずれが大きくなり、節が丸棒に近づくと、丸棒の左右で定常波の振幅が非対称になる。そのため丸棒の周りに生じる渦も非対称となり、腹に近い側では渦がよく発達するが、節に近い側では渦が  $x$  軸から離れ、渦内の動きも弱くなる。

## (2) 障害物が金属球の場合

ボールベアリング用の鋼球に穴を開け、細い金属線を取り付ける。上の金属線は角筒管上面の穴に通して支え、下の金属線は長さ 3.7 cm の細長い金属板に固定し、板を角筒管の底面に貼り付ける。そのとき、板の角を削って空気の流れに乱れが生じないようにしておく。

(1)と同様に、鋼球の位置に定常波の腹がくるようにし、音量を適切に設定すれば、図 3 の 2 次元の渦を  $x$  軸の周りに 1 回転させたときにできる 2 つのトーラス状 (ドーナツ形) の 3 次元の渦が生じる。アンドラーデは、直径  $d$  が 3.17 mm の鋼球の場合に、鉛直面内の流線も参考にしながら、3 次元空間内の流線を求め、それを図示している。

次節に登場するが、 $d = 0.081$  mm の金糸の端をブンゼンバーナーで溶かして作った  $d = 0.416$  mm と 0.251 mm の金の微小球にも同様の細工をして実験をしている。このような細工は容易であるとアンドラーデは言うが、不器用な筆者には信じ難い。金糸を引き伸ばして微小球を支える糸としたのではないかと想像するが、それについての説明はない。

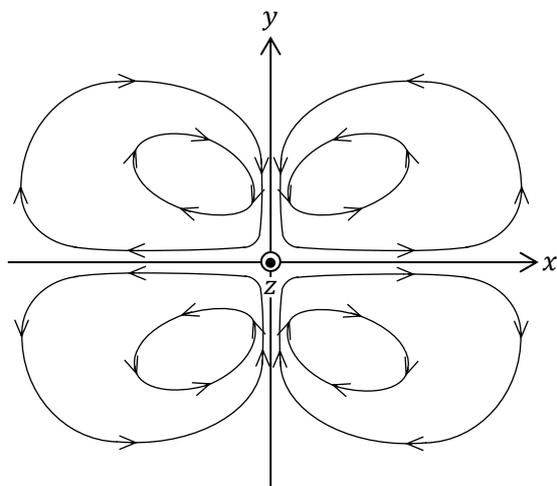


図 3  $z$  軸上の丸棒の周りに生じる 4 つの渦  
定常波の振動は  $x$  軸方向

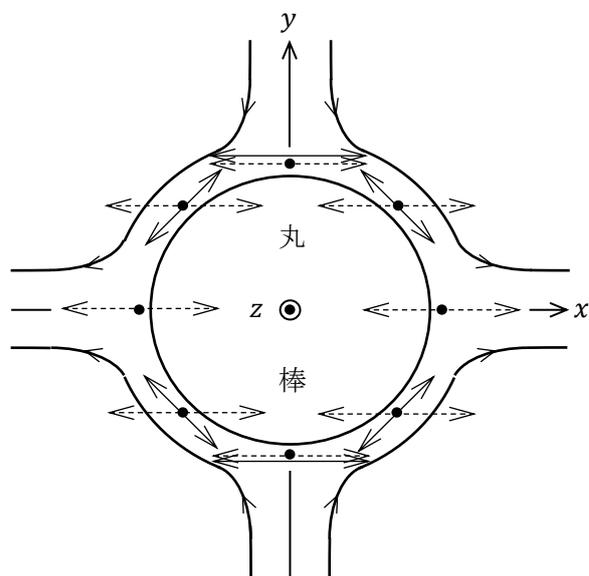


図 4 丸棒近傍における音波振動と渦の流れる向き  
 - - - - - 丸棒がないときの流体粒子の振動  
 ——— 丸棒の表面近傍での流体粒子の振動  
 この図は筆者が描いたもので原論文にはない。

## §5 渦発生の条件

どのような条件が満たされれば、音場中の障害物の周りに渦ができるのか、あるいはできないのか、その境界を表す数式を求めるのが目標である。アンドラーデは渦の運動学的相似性を仮定し、次元解析によって渦発生に関与していると思われる物理量の間に成り立つべき関係式の一般形を求め、さらに実験データを用いて、渦出現の境界を表す具体的な数式を得た。

アンドラーデの論法は、筆者には一部釈然としないところがあり、計算も二度手間になっているので、本稿では Buckingham の  $\pi$  定理 (脚注 5) を用いて、もっとすっきりした説明に替える。得られる結果は同じである。

目標とする関係式に関与する物理量としては、媒質の変位振幅  $a$  [m] と角振動数  $n$  [ $s^{-1}$ ]、障害物の大きさ  $d$  [m]、および媒質の動粘性係数  $\nu$  [ $m^2s^{-1}$ ] の 4 つが考えられる。これらの物理量に現れる単位は SI で m と s の 2 つであるから、 Buckingham の  $\pi$  定理により、 $(a, n, d, \nu)$  を用いて表せる  $(4 - 2) = 2$  個の独立な無次元量を  $\pi_1, \pi_2$  として、求めたい関係式は、

$$\pi_1 = \psi(\pi_2) \quad (4)$$

と表せる。 $\psi$  の関数形を決めるのが物理であるのだが、それは難問で、今に至るも未解決である。

$\pi_1$  と  $\pi_2$  を求めるために、

$$a^\alpha n^\beta d^\gamma \nu^\delta = \text{無次元量} \quad (5)$$

とおき、両辺の次元を比べれば、

$$\left. \begin{array}{l} \alpha + \gamma + 2\delta = 0 \\ \beta + \delta = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 2\beta - \gamma \\ \delta = -\beta \end{array} \right. \quad (6)$$

を得る。これらを式 (5) に代入すれば、

$$\left(\frac{a}{d}\right)^{-\gamma} \left(\frac{n a^2}{\nu}\right)^\beta = \text{無次元量} \quad (7)$$

となる。ここでたとえば、

$$\pi_1 = \frac{a}{d}, \quad \pi_2 = \frac{n a^2}{\nu} \quad (8)$$

とすれば、アンドラーデが得た式と同じ次の式を得る。

$$\frac{a}{d} = \psi\left(\frac{n a^2}{\nu}\right) \quad (9)$$

アンドラーデは帰納法によって  $\psi$  の関数形を求めた。実験では媒質は空気の場合だけを考えているので、 $\nu = 1.50 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$  であり、障害物は球であるのでその直径を  $d$  とする。表 I にある

(脚注 5)  $m$  個の物理単位で表された  $n$  個の物理量  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) を用いて、ある物理現象が数式  $f(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0$  で表されるならば、この数式は、

$$\pi_j = q_1^{a_{1j}} \cdot q_2^{a_{2j}} \cdot \dots \cdot q_n^{a_{nj}} \quad (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj} \text{ は有理数})$$

与えられる  $(n - m)$  個の独立な無次元量  $\pi_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n - m$ ) を用いて、

$$F(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-m}) = 0$$

と書き換えられる。

( $d, n$ ) の 9 個の組み合わせに対して実験が行われた。それぞれの場合について音の強さを徐々に大きくして、渦ができ始めたときに、球から遠く離れた腹の位置で  $a$  の値が測定された。渦が出現する初期段階では、図 3 の  $x$  軸の正と負の向きにタバコの煙の噴出が見られるので、渦ができ始める瞬間を捉えることは容易であるという。

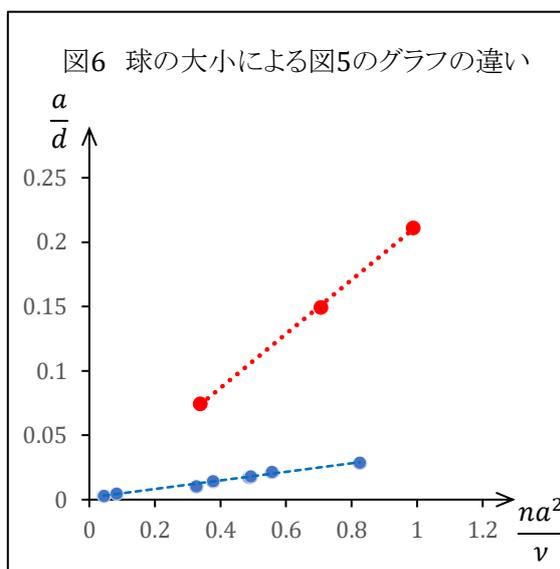
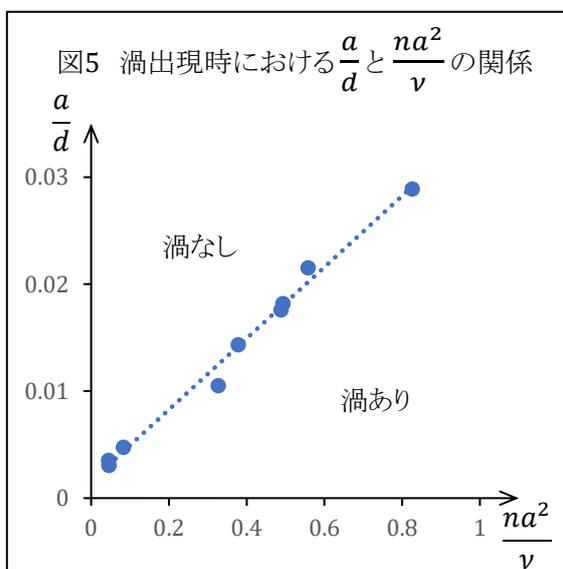
空気の変位振幅  $a$  は、顕微鏡の視野に張られた 2 本の平行な糸の間隔を何度も調節し、同じ視野に見えるタバコ粒子のジグザグ運動の長さ  $2a$  と等しくなったときの間隔を測定することによって求められた。顕微鏡や照明の仕方についての詳細は省略する。測定は 10 回行なわれ、その平均値を測定値としている。異なる測定者による誤差は 5 % 以下であるという。

このようにして得た実験データから式 (8) の  $\pi_1$  と  $\pi_2$  の値を計算し、それらを図示したのが図 5 である。これら 9 個のデータはほぼ直線上にあり、その直線は次式で表される。

$$\frac{a}{d} = 0.0017 + 0.0331 \frac{na^2}{v} \quad (10)$$

直線からのずれが大きい 2 つのデータは、両方とも一日の実験の最後に得られたもので、疲れていたことがずれの原因かもしれないが、それを理由にこれら 2 つデータを棄却するようなことはしなかった、とアンドラーデは述べている。

この直線より右下の領域では渦が生じ、左上の領域では生じない。



ところが、ここで予想外のことが起こる。 $d = 0.081 \text{ mm}$  の金属線を障害物とする実験結果から類推して、球の直径が表 I にある値より 1 桁以上小さければ、渦発生の境界が図 5 の直線にならないかもしれないという可能性が出てきた。そこで、表 II にある微小球を用いた 3 つの場合について実験をしたところ、図 6 の原点と赤点を通る直線の関係が得られた。青点は図 5 と同じで、目盛りが異なるだけである。

このように障害物の大小で異なる振舞いをする音響現象は他にもあるとして、球の大小によって渦の発生原因が異なる可能性をアンドラーデは示唆している。具体的には、表 I と表 II の右端の列にあるように、球の表面に粘着している粘性境界層の厚さ  $\delta$  と球の直径  $d$  との比  $\delta/d$  が、2 つのグループで大きく異なることを指摘している。この粘性境界層の内部にも図 3 の渦とは逆向きに回る渦があり、それが外側の渦を引き起こすので、 $\delta/d$  のちがいが外側の渦の発生に影響することもあり得る。しかし、この比は  $d, n, \nu$  を用いて表されるのであるから、 $d$  の大小で場合分けすることには無理がある。渦の発生が  $a, n, d, \nu$  の 4 つの物理量だけに依存するのであれば、発生条件は式 (8) のような 2 つの無次元量を用いた一つの式で表されなければならない。

筆者は別の説明が可能であると思う。それを次節で述べる。

表 I 最初の実験で用いた小球に関する データ と 実験結果

$d$ [mm]	$f$ [Hz]	$n$ [Hz]	$a$ [ $\mu\text{m}$ ]	$\frac{n a^2}{\nu}$	$\frac{a}{d}$	$\delta$ [ $\mu\text{m}$ ]	$\frac{\delta}{d}$
2.37	780	4901	34	0.378	0.0143	78.2	0.033
2.37	512	3217	51	0.558	0.0215	96.6	0.041
2.37	420	2639	68.5	<u>0.826</u>	0.0289	107.	0.045
3.18	840	5278	11.2	0.044	0.0035	75.4	0.024
4.75	312	1960	50	0.327	0.0105	124.	0.026
4.75	512	3217	14.5	0.045	0.00305	96.6	0.020
5.6	120	754	9.85	0.488	0.0176	199.	0.036
6.32	89	559	115.	0.493	0.0182	232.	0.037
6.32	220	1382	30.0	0.083	0.0047	147.	<u>0.023</u>

表 II 確認実験で用いた微小球に関する データ と 実験結果

$d$ [mm]	$f$ [Hz]	$n$ [Hz]	$a$ [ $\mu\text{m}$ ]	$\frac{n a^2}{\nu}$	$\frac{a}{d}$	$\delta$ [ $\mu\text{m}$ ]	$\frac{\delta}{d}$
0.416	840	5278	31	0.338	0.075	75.4	0.181
0.251	840	5278	53	0.988	0.211	75.4	0.300
0.251	1200	7540	37.5	0.707	0.149	63.1	0.251

(注)

アンドラーデの計算間違いか転写間違いと思われる数値は正しい数値(下線部)に書き直してある。昔は筆算か 5 桁の対数表か計算尺か手廻し計算機(日本人ならそろばん)で数値計算をしていたので、このような間違いはよくある。 $\delta = \sqrt{2\nu/n}$  は粘性境界層の厚さである。

## §6 渦発生の条件に関する筆者の憶測

前節では媒質として空気だけを考えたが、媒質を変えれば渦の発生が影響を受ける可能性がある。媒質を変えたときに変わる物理量としては、動粘性係数のほかに音速がある。そこで、渦の発生に関与する物理量として音速  $c$  [m/s] を加え、前節と同様の計算をする。まず、

$$a^\alpha n^\beta d^\gamma v^\delta c^\varepsilon = \text{無次元量} \quad (11)$$

として、両辺の次元を比べれば、

$$\left. \begin{array}{l} \alpha + \gamma + 2\delta + \varepsilon = 0 \\ \beta + \delta + \varepsilon = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \delta = \beta - \alpha - \gamma \\ \varepsilon = \alpha + \gamma - 2\beta \end{array} \right. \quad (12)$$

を得る。これらを式 (11) に代入すれば、

$$(a v^{-1} c)^\alpha (n v c^{-2})^\beta (d v^{-1} c)^\gamma = \text{無次元量} \quad (13)$$

となる。 Buckingham の  $\pi$  定理によれば、求める関係式は  $(5 - 2) = 3$  個の独立な無次元量  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$  を用いて表される。

$$\pi_1 = \frac{ac}{v}, \quad \pi_2 = \frac{nv}{c^2}, \quad \pi_3 = \frac{dc}{v} \quad (14)$$

としてもよいが、ここでは次の 3 つの独立な無次元量を導入する。

$$\frac{\pi_1}{\pi_3} = \frac{a}{d} \equiv Pr, \quad \pi_1 \pi_2 = \frac{an}{c} \equiv Ma, \quad \pi_1 \pi_2 \pi_3 = \frac{nad}{v} \equiv Re \quad (15)$$

上式において、 $Pr$  は障害物の大きさに対する変位振幅の比率を表し、 $an$  は媒質の速度振幅であるから、 $Ma$  はマッハ数を、 $Re$  はレイノルズ数を表す。渦発生のときに成り立つ関係式は、これらの無次元量を用いて、

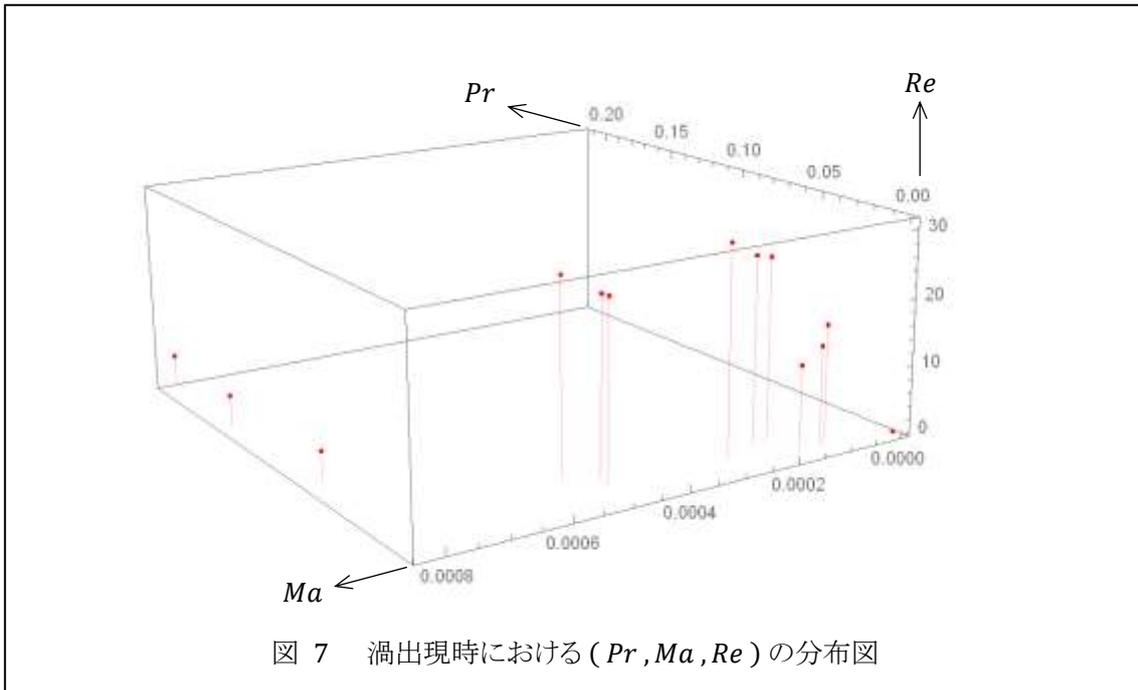
$$Re = \psi(Pr, Ma) \quad (16)$$

と表される可能性がある。ちなみに、実験が 1 気圧のもとに大きな角筒管を用いて行われるとすれば、2 つの実験で  $Pr, Ma, Re$  の値が同じであることは、相似な境界条件のもとでの圧縮性粘性流体に対するナビエ・ストークス方程式の解に相似則が成り立つことを意味する。

前節と同様に、アンドラーデの実験データを用いて関数  $\psi$  の概形なりとも得られないかと思ったのであるが、データが少ない上に、図 7 が示すように、 $(Pr, Ma)$  面上でのデータの分布が偏っているので、目論見ははずれた。

もし憶測通りに式 (16) の関係式が存在すれば、その曲面の下側の  $Re$  が小さい領域では渦はなく、媒質は各点で単振動するだけである。曲面の上側の  $Re$  が大きい領域では渦が発生する。渦が発生しているときに速度振幅を大きくしていくと、管内の循環流が発達し、やがて渦を押し流してしまう。渦が消失する境界を表す関係式を求めるためには、それに関与する別の物理量 (音響管の大きさ  $D$ ) を導入しなければならない。そしてもう一つのレイノルズ数  $Re' = anD/v$  が充分大きな値をとる領域では、音響管内は乱流状態になるのであろう。

音響管内の循環流と障害物の周りの渦との関係については、まだほとんどなにもわかっていない。



(文献)

1. 松田和久・野村英之・鎌倉友男 : クントの実験における縞模様形成のなぞ,  
日本音響学会誌 71 巻 3 号 (2015), pp.143–149
2. Andrade, E. N. da C. : On the circulations caused by the vibration of air in a tube,  
Proc. Roy. Soc. A134 (1931), pp.445–470
3. Basset, A. B. : A Treatise on Hydrodynamics Vol.II,  
Deighton, Bell and Co. (1888), pp.263–267
4. Rayleigh, J. W. S. : On the circulation of air observed in Kundt's tubes, and  
on some allied acoustical problems, Philos. Trans. CLXXV (1884), pp.1–21  
この論文の中の循環流に関する部分を独立させ、文章を少しだけ変えたものが、次の書籍  
に再録されている。  
Rayleigh, J. W. S. : The Theory of Sound Vol.II, Dover Publications, pp.333–342

(補足)

音響流研究の先駆けとなったレイリーの論文(明治17年)の概要

外力がはたらかないとき、粘度  $\eta$  の圧縮性粘性流体の運動は、次のナビエ・ストークス方程式と連続方程式に支配される。

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\text{grad } p + \eta \nabla^2 \vec{v} + \frac{\eta}{3} \text{grad}(\text{div } \vec{v}) \quad (1)$$

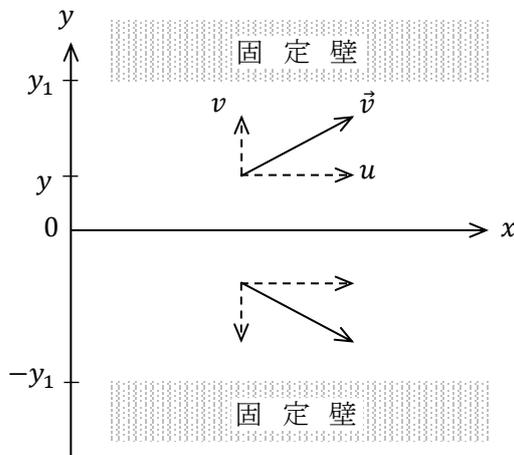
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (2)$$

簡単のために、図(i)のように、無限に広い2つの平行な固定壁に囲まれた領域での2次元の運動に限定する。密度  $\rho$  の代わりにその平均値  $\rho_0$  からのずれを表す無次元量  $s = \log(\rho/\rho_0)$  を導入し、圧力  $p$  と密度  $\rho$  の間に  $p = a^2 \rho$  の関係があると仮定する(脚注1)。さらに、動粘性係数を  $\mu' = \eta/\rho \approx \eta/\rho_0$  とし、 $\mu'' = \mu'/3$  とおけば、式(1)と式(2)は次のように書き換えられる。

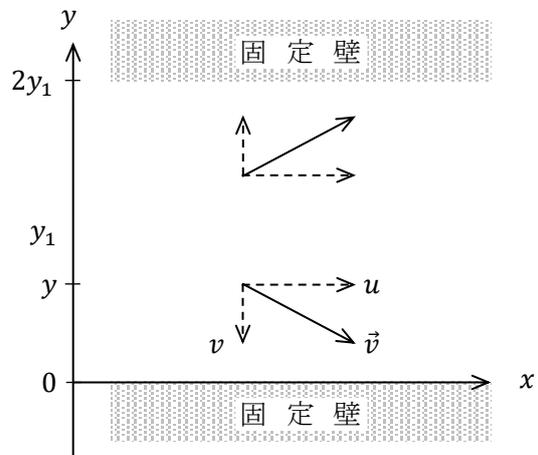
$$a^2 \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} + \mu' \nabla^2 u + \mu'' \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (3)$$

$$a^2 \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial t} - u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} + \mu' \nabla^2 v + \mu'' \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} + v \frac{\partial s}{\partial y} = 0 \quad (5)$$



図(i) 前半で採用する座標軸



図(ii) 後半で採用する座標軸

(脚注1) この仮定は、 $\rho = \rho_0$  の近傍で  $\delta p = a^2 \delta \rho$  と仮定する、に代えるべきだと筆者は思う。

この仮定により、 $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = a^2 \frac{\partial s}{\partial x}$  を得る。一方、気体の体積弾性率  $K$  は、体積  $V$  の

変化率を  $\frac{\delta V}{V}$  として、 $K = -\delta p / \frac{\delta V}{V}$  と表され、質量不変則から  $\frac{\delta \rho}{\rho} + \frac{\delta V}{V} = 0$  が成り立つの

で、音速  $c$  は  $\sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{\delta p}{\delta \rho}} = a$  となる。すなわち、 $a$  は音速  $c$  である。

ここで次式を満たす2つの未知関数  $\phi$  と  $\psi$  を導入する。

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v &= \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{aligned} \nabla^2 \phi &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \\ \nabla^2 \psi &= \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

長くなるので式の展開は省略するが、式(3), (4), (5)より  $s, \phi, \psi$  が満たすべき微分方程式を導けば、次のようになる。

$$\begin{aligned} & \left( a^2 + \mu' \frac{\partial}{\partial t} + \mu'' \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^2 s - \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left( u \frac{\partial s}{\partial x} + v \frac{\partial s}{\partial y} \right) \\ & -(\mu' + \mu'') \nabla^2 \left( u \frac{\partial s}{\partial x} + v \frac{\partial s}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\nabla^2 \phi + \frac{\partial s}{\partial t} = -u \frac{\partial s}{\partial x} - v \frac{\partial s}{\partial y} \quad (8)$$

$$\left( \mu' \nabla^4 - \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \right) \psi = \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \nabla^2 \psi + u \frac{\partial(\nabla^2 \psi)}{\partial x} + v \frac{\partial(\nabla^2 \psi)}{\partial y} \quad (9)$$

これらの解が求めれば、 $\rho, u, v$  を  $t, x, y$  の関数として表すことができる。

まず1次近似として、式(7), (8), (9)の右辺にある  $u, v, s$  の積を含む項をすべて無視し、すなわち右辺を0とおき、 $s, \phi, \psi$  に対する線形の微分方程式を解く。ここで、 $s, \phi, \psi$  の時間的変化は  $e^{int}$  で表され、 $x$  方向の空間的変化は  $e^{ikx}$  で表せるとする。すなわち、 $x$  方向に角振動数  $n$ 、波長  $\lambda = 2\pi/k$  の定常波があるとすれば、1次近似の解は次のようになる。

$$s = A e^{int} e^{ikx} \cosh k'' y \quad (10)$$

$$\phi = i \frac{q}{n} s \quad (11)$$

$$\psi = B e^{int} e^{ikx} \sinh k' y \quad (12)$$

$$u = e^{int} e^{ikx} \left( -\frac{k q}{n} A \cosh k'' y + k' B \cosh k' y \right) \quad (13)$$

$$v = e^{int} e^{ikx} \left( i \frac{q k''}{n} A \sinh k'' y - i k B \sinh k' y \right) \quad (14)$$

ただし、 $A$  と  $B$  は未知定数であり、

$$q = a^2 + i n \mu' + i n \mu'' \quad (15)$$

$$k'^2 = k^2 + i \frac{n}{\mu'} \quad (16)$$

$$k''^2 = k^2 - \frac{n^2}{q} \quad (17)$$

である。図(i)の座標軸で  $y = \pm y_1$  にある固定壁の表面では、粘性流体のすべりと剥離がないので、 $u = 0, v = 0$  である。これを用いて式(13)と式(14)より  $k$  が満たすべき式を求めれば、

$$k^2 \tanh k' y_1 = k' k'' \tanh k'' y_1 \quad (18)$$

となる。固定壁に粘着している粘性境界層の厚さ  $\delta$  は  $\sqrt{2\mu'/n}$  で与えられるので、 $\delta \ll y_1 \ll \lambda$  であれば (脚注 2), 式 (16) より,

$$k' \approx \sqrt{i \frac{n}{\mu'}} = \beta(1+i) \quad \text{ただし} \quad \beta = \sqrt{\frac{n}{2\mu'}} = \frac{1}{\delta} \quad (19)$$

となるから、 $k'y_1$  は大きい数値である。また式 (15) より、 $q \approx a^2$  であるから、式 (17) の右辺は 0 に近い。よって、 $k''y_1$  は小さい数値である。これらの近似を用いれば、式 (18) より,

$$k^2 \approx k'k''^2 y_1 \rightarrow k = \pm \frac{n}{a} \left( 1 + \frac{1-i}{2y_1\sqrt{2n/\mu'}} \right) \quad (20)$$

を得る。すなわち、 $k$  は実数  $\pm n/a$  に近い複素数である。

粘性流体の運動は  $x$  軸に関して上下対称であるので、 $y < 0$  の領域だけで考えれば,

$$\cosh k'y \approx \frac{1}{2} e^{-k'y} \approx -\sinh k'y, \quad \cosh k''y \approx 1, \quad \sinh k''y \approx k''y$$

となる。この近似により、式 (13) と式 (14) は次のように書き換えられる。

$$u = u_0 \left\{ -1 + e^{-k'(y+y_1)} \right\} e^{ikx} e^{int} \quad (21)$$

$$v = u_0 \frac{ik}{k'} \left\{ \frac{y}{y_1} + e^{-k'(y+y_1)} \right\} e^{ikx} e^{int} \quad (22)$$

ただし、 $u_0$  は  $u$  の最大値である。 $k$  の虚部は小さいので  $k$  を実数とみなし、式 (21) と (22) とそれぞれの式の  $k$  を  $-k$  で置き換えた式を加え合わせて 2 で割れば,

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 \left\{ -1 + e^{-k'(y+y_1)} \right\} e^{int} \cos kx \\ v &= -u_0 \frac{k}{k'} \left\{ \frac{y}{y_1} + e^{-k'(y+y_1)} \right\} e^{int} \sin kx \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

を得る。さらに、近似式 (19) を用いれば、式 (23) は

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 \cos kx \left[ -\cos nt + e^{-\beta(y+y_1)} \cos\{nt - \beta(y+y_1)\} \right] \\ v &= -u_0 \frac{k \sin kx}{\sqrt{2}\beta} \left\{ \frac{y}{y_1} \cos\left(nt - \frac{\pi}{4}\right) + e^{-\beta(y+y_1)} \cos\left\{nt - \frac{\pi}{4} - \beta(y+y_1)\right\} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

となる。式をもう少し見やすくするために、図 (ii) の座標軸に変換すれば、1 次近似の解は、

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= u_0 \cos kx \left[ -\cos nt + e^{-\beta y} \cos(nt - \beta y) \right] \\ v_1 &= u_0 \frac{k \sin kx}{\sqrt{2}\beta} \left[ \left(1 - \frac{y}{y_1}\right) \cos\left(nt - \frac{\pi}{4}\right) - e^{-\beta y} \cos\left(nt - \frac{\pi}{4} - \beta y\right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

と表される。以下においては、図 (ii) の  $0 \leq y \leq y_1$  の領域で考える。

1 次近似では式 (7), (8), (9) の右辺を無視したのであるが、2 次近似では右辺の  $s, u, v$  と式 (9) に現れる  $\nabla^2 \psi$  に 1 次近似の解を代入し、左辺の  $s$  と  $\phi$  および  $\nabla^4 \psi$  の  $\psi$  を 2 次近似の未知関数として  $s_2, \phi_2, \psi_2$  に置き換えて解く。そのとき、右辺に現れる時刻  $t$  を引数とする 2 つの三角関数の積は、積和の公式:

$$\cos(nt + \theta_1) \cdot \cos(nt + \theta_2) = \frac{1}{2} \{ \cos(2nt + \theta_1 + \theta_2) + \cos(\theta_1 - \theta_2) \}$$

(脚注 2) たとえば、口径 4 cm の円筒管で  $f = 500$  Hz の音源を用いたクントの実験では、

$\delta \sim 0.1$  mm,  $y_1 = 2$  cm,  $\lambda = 0.7$  m となる。

により、2倍振動と直流成分の和となることがわかる。この直流成分が循環流となる。2倍振動には興味がないので、以下ではこの成分を無視する。さらに、

$$\frac{1}{\beta} = \delta \ll \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

であるから、以下では適宜  $k/\beta \ll 1$  を用いて近似計算をする。

直流成分に寄与する  $\psi_2$  は次の方程式から求まる。この式を導き出すためには長い計算をしなければならぬので省略する。

$$\nabla^4 \psi_2 = -\frac{k\beta}{4\mu'} \sin 2kx \cdot e^{-\beta y} (\sin \beta y + 3 \cos \beta y - 2e^{-\beta y}) \quad (26)$$

ここで、 $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \approx \frac{\partial^4}{\partial y^4}$  として、 $\psi_2$  を求めれば、

$$\psi_2 \approx \frac{u_0^2 k \sin 2kx}{16\mu' \beta^3} e^{-\beta y} \left( \sin \beta y + \cos \beta y + \frac{1}{2} e^{-\beta y} \right) \quad (27)$$

を得る。逆に、式 (27) に  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  または  $\frac{\partial^4}{\partial x^4}$  を作用させれば、式 (26) の右辺より因子

$(k/\beta)^2$  または  $(k/\beta)^4$  だけ小さくなるので、 $\nabla^4 \approx \frac{\partial^4}{\partial y^4}$  としてもよかったことがわかる。特解

(27) に、 $\nabla^4 \psi_2 = 0$  を満たす斉次解：

$$\psi_2 = \frac{u_0^2 \sin 2kx}{16\mu' \beta^3} \{A \sinh 2k(y_1 - y) + B(y_1 - y) \cosh 2k(y_1 - y)\} \quad (28)$$

を加えたものが式 (26) の一般解となる。 $y_1 \ll \lambda = 2\pi/k$  であれば、式 (28) は近似的に次のように表される。

$$\psi_2 \approx \frac{u_0^2 k \sin 2kx}{16\mu' \beta^3} \{A'(y_1 - y) + B'(y_1 - y)^3\} \quad (29)$$

結局、方程式 (26) の一般解は次のようになる。

$$\psi_2 \approx \frac{u_0^2 k \sin 2kx}{16\mu' \beta^3} \left\{ e^{-\beta y} \left( \sin \beta y + \cos \beta y + \frac{1}{2} e^{-\beta y} \right) + A'(y_1 - y) + B'(y_1 - y)^3 \right\} \quad (30)$$

直流成分に寄与する  $\phi_2$  は次の方程式から求まる。

$$\nabla^2 \phi_2 = \frac{u_0^2 k \cos^2 kx}{2a} e^{-\beta y} \sin \beta y \quad (31)$$

ここでも  $\nabla^2 \approx \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  として式 (31) の特解を求め、それに  $\nabla^2 \phi = 0$  を満たす斉次解を加えれば、 $\phi_2$  の一般解は次のようになる。

$$\phi_2 \approx \frac{u_0^2 k}{4a\beta^2} \left[ \cos^2 kx \cdot e^{-\beta y} \cos \beta y + \sin 2kx \cdot \{A'(y_1 - y) + B'\} \right] \quad (32)$$

ただし、 $ky_1 \ll 1$  を仮定している。

2次近似の  $u_2$  と  $v_2$  は、次の式 (6) から求まる。

$$u_2 = \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y}, \quad v_2 = \frac{\partial \phi_2}{\partial y} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \quad (6)$$

これらの右辺の第1項は第2項に比べて、 $u_2$  の場合は因子  $(k/\beta)^2$  だけ小さく、 $v_2$  の場合は因子  $(k/\beta)$  だけ小さいので、第1項は無視できる。また、 $y=0$  で  $u_2=0, v_2=0$  でなければならないことから  $A'$  と  $B'$  が決まり、2次近似の解は、

$$u_2 = -\frac{u_0^2 \sin 2kx}{8a} \left[ e^{-\beta y} (4 \sin \beta y + 2 \cos \beta y + e^{-\beta y}) + \frac{3}{2} - \frac{9}{2} \left(1 - \frac{y}{y_1}\right)^2 \right] \quad (33)$$

$$v_2 = -\frac{u_0^2 \cos 2kx}{4a} \left[ e^{-\beta y} \left( \sin \beta y + 3 \cos \beta y + \frac{1}{2} e^{-\beta y} \right) \frac{k}{\beta} + \frac{3}{2} ky_1 \left(1 - \frac{y}{y_1}\right) \left\{ 1 - \left(1 - \frac{y}{y_1}\right)^2 \right\} \right] \quad (34)$$

となる。粘性境界層の外側 ( $y > \delta$ ) では、 $e^{-\beta y} \cong 0$  とみなせるので、

$$u_2 = -\frac{3u_0^2 \sin 2kx}{16a} \left\{ 1 - 3 \left(1 - \frac{y}{y_1}\right)^2 \right\} \quad (35)$$

$$v_2 = -\frac{3u_0^2 \cos 2kx}{16a} \cdot 2ky_1 \left(1 - \frac{y}{y_1}\right) \left\{ 1 - \left(1 - \frac{y}{y_1}\right)^2 \right\} \quad (36)$$

となる。一方、式 (15) より、 $y > \delta$  では、

$$u_1 = -u_0 \cos kx \cos nt \quad (37)$$

であるから、 $j$  を整数として、 $x = j \frac{\pi}{k}$  は定常波の腹の位置であり、 $x = (j + \frac{1}{2}) \frac{\pi}{k}$  は節の位置

である。よって、粘性境界層の外側での流れの向きは図 (iii) のようになる。

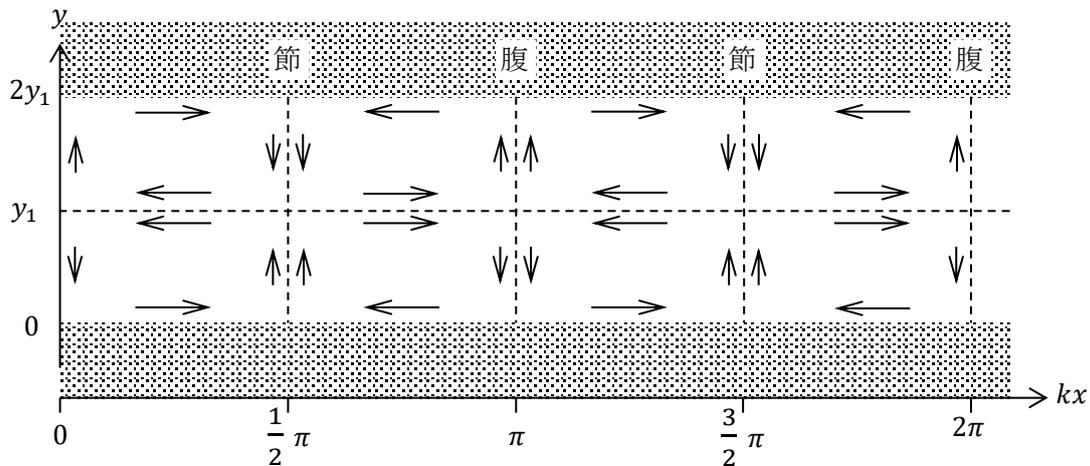


図 (iii) 2次元循環流の向き

この循環流は2次元 $(x, y)$ での流れである。式(35), (36)は $\nabla^4\psi_2 = 0$ から導き出されたのであるから、円筒管内の循環流も同じようにして導かれるであろう。円筒座標 $(r, \theta, x)$ では、 $\psi_2$ はストークスの流れ関数で、 $x$ 軸のまわりの回転対称性より、 $\psi_2$ が満たすべき方程式は、

$$D^2\psi_2 = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - 4k^2 \right) \psi_2 = 0 \quad (38)$$

となる(文献3 : §485 の式(5)と $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ を代入した式(7))。  $x$  軸方向の定常波の波長 $\lambda = 2\pi/k$ に比べて円筒の半径 $R$ が充分小さいとすれば、 $k^2 \approx 0$ としてよい。そのとき、式(38)の一般解は次のように表される。

$$\psi_2 = \{ A + B r^2 + B' r^2 \log r + C r^4 \} \sin 2kx \quad (39)$$

これより半径方向の速度成分は、

$$v_2 = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial x} = -2k \left( \frac{A}{r} + B r + B' r \log r + C r^3 \right) \cos 2kx \quad (40)$$

となる。管軸 $(r = 0)$ 上では $v_2 = 0$ でなければならないから、 $A = 0, B' = 0$ である。よって、2次近似の速度成分は、

$$u_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial r} = (2B + 4C r^2) \sin 2kx \quad (41)$$

$$v_2 = -2k(B r + C r^3) \cos 2kx \quad (42)$$

となる。さらに、 $r = R$ で $v_2 = 0$ でなければならないので、 $B + C R^2 = 0$ となり、

$$u_2 = 2C(2r^2 - R^2) \sin 2kx \quad (43)$$

$$v_2 = -2Ckr(r^2 - R^2) \cos 2kx \quad (44)$$

を得る。アンドラーデは、式(43)と式(44)から計算された流線の形と実験で得られた流線の形を比較したのである。

「熱中物理」に掲載されている論文の要約は [こちらへ](#)