

クントの実験に関していまだによくわかっていないこと (2)

齊藤 全弘

§1 音響学の基本方程式とその解

断面積が  $S$  で無限に長い円筒のなかを  $x$  軸(中心軸)の正の向きに平面音波が伝わる場合を考える。音波がないときの気圧を  $P_0$  とし、音波による圧力変化(音圧)を  $p(x, t)$  とする。  $|p| \ll P_0$  である。厚さ  $\Delta x$  の空気層の平均密度を  $\bar{\rho}$  , その重心の変位を  $\bar{\xi}$  とすれば、空気層の運動方程式は

$$(\bar{\rho} S \Delta x) \frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial t^2} = -S \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \quad (1)$$

となる(図1参照)。  $\Delta x$  が音波の波長に比べて十分小さい場合、1次の微小量だけを考慮すれば、  $\bar{\rho}$  を音波がないときの密度  $\rho$  に、  $\bar{\xi}$  を位置  $x$  での空気の変位  $\xi(x, t)$  に置き換えることができ、運動方程式は

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2)$$

となる。ただし、  $v(x, t)$  は空気の変位速度

$$v = \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad (3)$$

である。この空気層の体積膨張率は

$$\frac{S \left\{ \left( \Delta x + \frac{\partial \xi}{\partial x} \Delta x \right) - \Delta x \right\}}{S \Delta x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (4)$$

であるから、空気の体積弾性率を  $K$  とすれば、その定義より、音圧は

$$p = -K \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (5)$$

と表される。式(2),(3),(5)より  $\xi$  を消去し、  $v$  と  $p$  が満たすべき方程式を導けば、

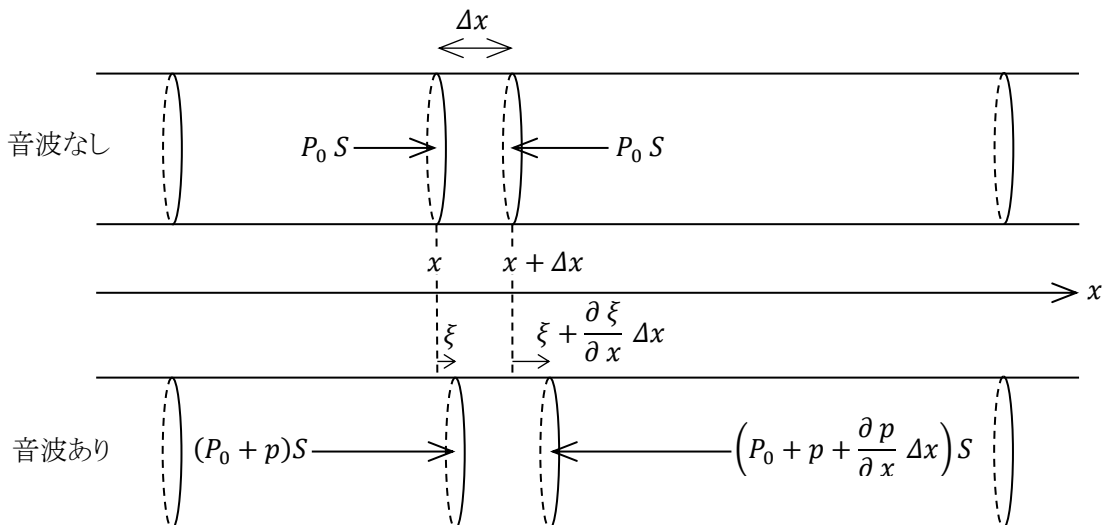


図 1

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (7)$$

となる。ただし  $c$  は音速で、 $K$  と  $\rho$  だけに依存し、

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad (8)$$

で与えられる。音波の到来によって空気層の体積が  $S \Delta x$  から  $S \Delta x \frac{\partial \xi}{\partial x}$  だけ微小断熱変化をし、

圧力が  $P_0$  から  $p$  だけ変化するとき、ポアソンの断熱式より、

$$\frac{p}{P_0} + \gamma \frac{S \Delta x \frac{\partial \xi}{\partial x}}{S \Delta x} = 0 \quad (\gamma \text{ は空気の比熱比}) \quad (9)$$

$$\therefore p = -\gamma P_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (10)$$

が成り立つ。これと式 (5) を比較すれば  $K = \gamma P_0$  となり、音速は

$$c = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho}} \quad (11)$$

と表される。

次に、速度ポテンシャル  $\phi(x, t)$  を導入する。その定義より、

$$v = - \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (12)$$

であるから、式 (2) は

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad (13)$$

と書き換えられる。この両辺を  $x$  で積分し、音波がない ( $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$  の) ときに  $p = 0$  となることに注意すれば、

$$p = \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (14)$$

を得る。式 (12), (3), (5), (14), (8) より  $\phi$  が満たすべき方程式を導けば、

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (15)$$

となる。以下では、角振動数  $\omega$  ( $= 2\pi \times \text{振動数} = 2\pi / \text{周期}$ ) の複素正弦波

$$\phi(x, t) = \Phi(x) e^{j\omega t} \quad (j \text{ は虚数単位}) \quad (16)$$

だけを考える。 $\Phi(x)$  は  $\phi$  の複素振幅である。この式を式 (15) に代入すれば、

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} = \frac{1}{c^2} (-\omega^2) \Phi = -\kappa^2 \Phi \quad (17)$$

を得る。ただし、 $\kappa (= 2\pi / \text{波長})$  は (角) 波数で、 $c$  と  $\omega$  と  $\kappa$  の間には、

$$c = \frac{\omega}{\kappa} \quad (18)$$

の関係がある。微分方程式 (17) の解は、 $\Phi_+$  と  $\Phi_-$  を定数として、

$$\Phi(x) = \Phi_+ e^{-j\kappa x} + \Phi_- e^{j\kappa x} \quad (19)$$

と表される。これに対応して、 $\phi, v, p$  は、

$$\phi(x, t) = \Phi_+ e^{j(\omega t - \kappa x)} + \Phi_- e^{j(\omega t + \kappa x)} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} v(x, t) &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} \\ &= j\kappa \{ \Phi_+ e^{j(\omega t - \kappa x)} - \Phi_- e^{j(\omega t + \kappa x)} \} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} p(x, t) &= \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \\ &= j\omega \rho \{ \Phi_+ e^{j(\omega t - \kappa x)} + \Phi_- e^{j(\omega t + \kappa x)} \} \end{aligned} \quad (22)$$

となる。いずれも第 1 項は  $x$  軸の正の向きに伝わる波を表し、第 2 項は  $x$  軸の負の向きに伝わる波を表す。

いま、 $x$  軸の正の向きに伝わる波だけを考えれば、

$$v(x, t) = V e^{j(\omega t - \kappa x)} \quad (23)$$

$$p(x, t) = P e^{j(\omega t - \kappa x)} \quad (24)$$

と表すことができる。 $V$  と  $P$  はそれぞれ  $v$  と  $p$  の複素振幅で、

$$P = j\omega \rho \Phi_+ = j(\kappa c) \rho \Phi_+ = \rho c \cdot j\kappa \Phi_+ = \rho c V \quad (25)$$

を満たす。このとき、

$$z(x) = \frac{p(x, t)}{v(x, t)} = \frac{P(x)}{V(x)} = \rho c \quad (26)$$

を断面  $x$  から右側の円筒を見たときの固有 (あるいは特性、あるいは比) 音響インピーダンスと言う。インピーダンスという名称の由来については最後の【補足】で述べる。この音波のようにエネルギーの散逸なしに円筒のなかを伝わる平面波の場合には、 $z$  は  $x$  に依らない正の実数で  $p$  と  $v$  は同位相となるが、一般的な音波の場合、たとえば空気の粘性によるエネルギーの散逸がある場合や、円筒が有限の長さで開口端から音波が空気中に拡がっていくような場合には、 $z$  は  $x$  に依存する複素数となる。その実部を音響抵抗密度といい、虚部を音響リアクタンス密度という。

## §2 エネルギー密度とエネルギー流量密度

図 1 の円筒内を伝わる音波のエネルギー密度  $e(x, t)$  とエネルギー流量密度  $w(x, t)$ 、およびそれらの間の関係式を求める。この節に限り、空気の変位  $\xi(x, t)$ 、変位速度  $v(x, t)$ 、音圧  $p(x, t)$  を実数とする。音波がないときの薄い空気層の体積を  $\Delta V_0 = S \Delta x$  とおけば、音波がある

ときの空気層の運動エネルギーは

$$\Delta E_K = \frac{1}{2} (\rho \Delta V_0) v^2 \quad (27)$$

と表され, その体積は

$$\Delta V = \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) \Delta V_0 = \left(1 - \frac{p}{\gamma P_0}\right) \Delta V_0 \quad (\because \text{式(4)と(10)}) \quad (28)$$

となる。このとき空気圧による位置エネルギーは,  $p = 0$  のときを基準として,

$$\begin{aligned} \Delta E_P &= - \int_{\Delta V_0}^{\Delta V} (P_0 + p) d(\Delta V) = -P_0 (\Delta V - \Delta V_0) + \int_0^p p \frac{\Delta V_0}{\gamma P_0} dp \quad (\because \text{式(28)}) \\ &= P_0 \frac{p \Delta V_0}{\gamma P_0} + \frac{1}{2} \frac{\Delta V_0}{\gamma P_0} p^2 = \frac{\Delta V_0}{\rho c^2} \left(P_0 p + \frac{1}{2} p^2\right) \quad (\because \text{式(11)}) \end{aligned} \quad (29)$$

となる。式(27)と(29)より, 円筒内空気のエネルギー密度  $e(x, t)$  は,

$$e(x, t) = \frac{\Delta E_K + \Delta E_P}{\Delta V_0} = \frac{1}{\rho c^2} P_0 p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{1}{2 \rho c^2} p^2 \quad (30)$$

と表される。式(23)と(24)で与えられる複素正弦進行波の場合には,

$$V = |V| e^{j\delta_V} \quad (31)$$

としてその実部を取り出せば,

$$v_R(x, t) = |V| \cos(\omega t - \kappa x + \delta_V) \quad (32)$$

$$p_R(x, t) = \rho c |V| \cos(\omega t - \kappa x + \delta_V) \quad (33)$$

となる。これらを式(30)の  $v$  と  $p$  に代入すれば,

$$e(x, t) = \frac{P_0}{c} |V| \cos(\omega t - \kappa x + \delta_V) + \rho |V|^2 \cos^2(\omega t - \kappa x + \delta_V) \quad (34)$$

を得る。

次に, 円筒の断面  $x$  を介して左側の空気が右側の空気におよぼす単位面積あたりの仕事率  $w(x, t)$ , 換言すれば, この断面を単位面積あたり単位時間あたりに通過するエネルギー(エネルギー流量密度)は,

$$w(x, t) = \{P_0 + p(x, t)\} v(x, t) \quad (35)$$

で与えられる。式(32)と(33)の場合には,

$$w(x, t) = P_0 |V| \cos(\omega t - \kappa x + \delta_V) + \rho c |V|^2 \cos^2(\omega t - \kappa x + \delta_V) \quad (36)$$

となる。 $w(x, t)$  の時間平均値が音波の強さ  $I(x)$  であるから,

$$I(x) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} w(x, t) dt = \frac{1}{2} \rho c |V|^2 \quad (37)$$

と表される。音波の強さは変位速度の実効値  $|V|/\sqrt{2}$  の 2 乗に比例し, 比例係数は音響抵抗密度である。

音波があるとき, 図 1 の厚さ  $\Delta x$  の薄い空気層が両側の空気におよぼす正味の仕事率  $\Delta W$  は, 式(35)より,

$$\Delta W = \frac{\partial (w S)}{\partial x} \Delta x = (P_0 \frac{\partial v}{\partial x} + p \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial x}) S \Delta x \quad (38)$$

となる。一方、この空気層に含まれるエネルギー  $\Delta E$  の時間変化率は、式 (30) より、

$$\frac{\partial (\Delta E)}{\partial t} = \frac{\partial (e S \Delta x)}{\partial t} = (\frac{P_0}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{p}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial t}) S \Delta x \quad (39)$$

となる。運動方程式 (2) を満たす正弦進行波の場合には、式 (26) より  $p = \rho c v$  が成り立つので、

$\Delta W$  と  $\frac{\partial (\Delta E)}{\partial t}$  は次式を満たす。

$$\begin{aligned} \Delta W &= (P_0 + 2p) \frac{\partial p}{\partial x} \frac{S \Delta x}{\rho c} \\ &= -(P_0 + 2p) \frac{\partial v}{\partial t} \frac{S \Delta x}{c} \quad (\because \text{式(2)}) \\ &= -(P_0 + 2p) \frac{\partial p}{\partial t} \frac{S \Delta x}{\rho c^2} \\ &= -\frac{\partial (\Delta E)}{\partial t} \end{aligned} \quad (40)$$

この両辺を  $S \Delta x$  で割れば、

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial e}{\partial t} = 0 \quad (41)$$

を得る。これらの式は仕事率とエネルギーの時間変化率の関係 (これをエネルギー原理という人がいる) を表しているのだが、 $w$  をエネルギー流量密度と解釈すれば、空気の微小領域から流れ出すエネルギーはその微小領域に含まれるエネルギーの減少量に等しいこと、すなわち広義のエネルギー保存則を表している。

式 (38) と (39) の右辺第 1 項は  $p / P_0$  の 1 次の微小量であり、第 2 項と第 3 項は 2 次の微小量である。式 (41) は 1 次の微小量だけに対しても、また 2 次の微小量だけに対しても成り立つ。

1 次の微小量に対して成り立つ式

$$\frac{\partial}{\partial x} (P_0 v) + \frac{\partial}{\partial t} (\frac{P_0}{\rho c^2} p) = 0 \quad (42)$$

は、式 (12) と (14) を代入すればわかるように、運動方程式 (15) そのものであるから、この項を除外し、以下においては式 (41) は 2 次の微小量に対する式とみなす。

### §3 反射と透過

無限に長い円筒の断面  $x = 0$  を境界面として 2 つの媒質 1 と 2 が接しているとする。  $x < 0$  の領域 (媒質 1) から境界面に入射した平面音波の一部が反射し、残りが  $x > 0$  の領域 (媒質 2) へ透過したとする。入射波、反射波、透過波の速度ポテンシャル、変位速度、音圧をそれぞれ、

$$\begin{cases} \phi_1(x, t) = \Phi_1 e^{j(\omega t - \kappa_1 x)} & (43) \\ v_1(x, t) = -\frac{\partial \phi_1}{\partial x} = V_1 e^{j(\omega t - \kappa_1 x)}, \quad V_1 = j \kappa_1 \Phi_1 & (44) \\ p_1(x, t) = \rho_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} = P_1 e^{j(\omega t - \kappa_1 x)}, \quad P_1 = j \omega \rho_1 \Phi_1 = \rho_1 c_1 V_1 & (45) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi_1'(x, t) = \Phi_1' e^{j(\omega t + \kappa_1 x)} & (46) \\ v_1'(x, t) = -\frac{\partial \phi_1'}{\partial x} = V_1' e^{j(\omega t + \kappa_1 x)}, \quad V_1' = -j \kappa_1 \Phi_1' & (47) \\ p_1'(x, t) = \rho_1 \frac{\partial \phi_1'}{\partial t} = P_1' e^{j(\omega t + \kappa_1 x)}, \quad P_1' = j \omega \rho_1 \Phi_1' = -\rho_1 c_1 V_1' & (48) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi_2(x, t) = \Phi_2 e^{j(\omega t - \kappa_2 x)} & (49) \\ v_2(x, t) = -\frac{\partial \phi_2}{\partial x} = V_2 e^{j(\omega t - \kappa_2 x)}, \quad V_2 = j \kappa_2 \Phi_2 & (50) \\ p_2(x, t) = \rho_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial t} = P_2 e^{j(\omega t - \kappa_2 x)}, \quad P_2 = j \omega \rho_2 \Phi_2 = \rho_2 c_2 V_2 & (51) \end{cases}$$

とおく。 $c_i = \omega / \kappa_i$  ( $i = 1, 2$ ) は媒質  $i$  での音速である。境界面 ( $x = 0$ ) で変位速度と音圧は連続でなければならないことから、

$$\begin{aligned} v_1(0, t) + v_1'(0, t) &= v_2(0, t) \\ \Rightarrow V_1 + V_1' &= V_2 & (52) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_1(0, t) + p_1'(0, t) &= p_2(0, t) \\ \Rightarrow P_1 + P_1' &= P_2 \\ \Rightarrow \rho_1 c_1 (V_1 - V_1') &= \rho_2 c_2 V_2 & (53) \end{aligned}$$

を得る。式 (52) と (53) から速度振幅の反射率  $r_V = V_1' / V_1$  と透過率  $t_V = V_2 / V_1$  を求めれば、

$$r_V = \frac{\rho_1 c_1 - \rho_2 c_2}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2}, \quad t_V = \frac{2\rho_1 c_1}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2} \quad (54)$$

となる。また、音圧振幅の反射率  $r_P = P_1' / P_1$  と透過率  $t_P = P_2 / P_1$  は、

$$r_P = -\frac{\rho_1 c_1 - \rho_2 c_2}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2} = -r_V, \quad t_P = \frac{2\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2} \quad (55)$$

となる。音波による媒質 1, 2 の変位を  $\xi_1(x, t)$ ,  $\xi_2(x, t)$  とおけば、

$$\xi_i = \int v_i dt = \frac{1}{j\omega} V_i e^{j(\omega t - \kappa_i x)} = \frac{1}{j\omega} v_i \quad (i = 1, 2) \quad (56)$$

であるから、式 (54) は変位振幅の反射率と透過率でもある。[文献 1](#) で弾性体棒のなかを伝わる縦波の変位振幅の反射率と透過率を求めたが、その式と式 (54) は一致している。ただし、弾性体棒での反射波の振幅  $-B$  を  $+B$  に置き換えることを見落としてはならない。

音波の強さは  $I(x) = \frac{1}{2} \rho c |V|^2$  であるから、境界面でのエネルギー反射率  $R = I_1' / I_1$  とエネルギー透過率  $T = I_2 / I_1$  は、

$$R = \frac{\rho_1 c_1 |V_1'|^2}{\rho_1 c_1 |V_1|^2} = r_V^2 = \left( \frac{\rho_1 c_1 - \rho_2 c_2}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2} \right)^2 \quad (57)$$

$$T = \frac{\rho_2 c_2 |V_2|^2}{\rho_1 c_1 |V_1|^2} = \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1} t_V^2 = \frac{4 \rho_1 c_1 \rho_2 c_2}{(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)^2} \quad (58)$$

となり,

$$R + T = 1 \quad (59)$$

を満たす。すなわち、境界面で音波のエネルギーが失われることはない。

次に、媒質 1 のなかを伝わる入射波と反射波の合成波を求める。まず変位速度の合成波は、

$$\begin{aligned} v(x, t) &= v_1(x, t) + v_1'(x, t) \\ &= (V_1 e^{-j\kappa_1 x} + r_V V_1 e^{j\kappa_1 x}) e^{j\omega t} \\ &= V_1 \{ (1 + r_V) \cos \kappa_1 x - j(1 - r_V) \sin \kappa_1 x \} e^{j\omega t} \\ &= V_1 \sqrt{1 + r_V^2 + 2 r_V \cos 2 \kappa_1 x} e^{j(\omega t - \alpha_V)} \end{aligned} \quad (60)$$

となる。ただし、 $r_V$  は式 (54) が示すように媒質に固有な量であり、

$$\alpha_V = \arctan(\beta \tan \kappa_1 x) \quad , \quad \beta = \frac{1 - r_V}{1 + r_V} \quad (61)$$

である。同様にして、音圧の合成波は、

$$\begin{aligned} p(x, t) &= p_1(x, t) + p_1'(x, t) \\ &= \rho_1 c_1 (V_1 e^{-j\kappa_1 x} - r_V V_1 e^{j\kappa_1 x}) e^{j\omega t} \\ &= \rho_1 c_1 V_1 \sqrt{1 + r_V^2 - 2 r_V \cos 2 \kappa_1 x} e^{j(\omega t - \alpha_P)} \end{aligned} \quad (62)$$

となる。ただし、

$$\alpha_P = \arctan\left(\frac{1}{\beta} \tan \kappa_1 x\right) \quad (63)$$

である。これらの合成波は、位相一定の波面が  $x$  軸方向に進むので、進行波である。その速さは波面の位置に依存し、最大値は音速  $\omega/\kappa_1$  を越える。しかし合成波の振幅は位置  $x$  だけの関数で、最大値と最小値をとる位置が交互に等間隔で並んでいる。この点に注目してこの合成波を定常波とみなすことにする。その腹と節の位置は次のようになる。

(a)  $\rho_1 c_1 > \rho_2 c_2$  の場合には、 $1 > r_V > 0$  であるから、合成波  $v$  の腹 ( $p$  の節) の位置  $x_n$  は、 $\cos 2 \kappa_1 x_n = +1$  より、

$$x_n = \frac{2 n \pi}{2 \kappa_1} = n \frac{\lambda_1}{2} \quad (\lambda_1 \text{ は媒質 1 での波長, } n = 0, -1, -2, \dots) \quad (64)$$

合成波  $v$  の節 ( $p$  の腹) の位置  $x_n$  は、 $\cos 2 \kappa_1 x_n = -1$  より、

$$x_n = \frac{(2n-1) \pi}{2 \kappa_1} = \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda_1}{2} \quad (n = 0, -1, -2, \dots) \quad (65)$$

(b)  $\rho_1 c_1 < \rho_2 c_2$  の場合には、 $0 > r_V > -1$  であるから、合成波の腹と節の位置は (a) の場合の逆になる。

前節と同様に、 $V_1 = |V_1| e^{j\delta_1}$  として式 (60) と (62) の実部を取り出し、2 次の微小量のエネルギー密度  $e_1$  とエネルギー流量密度  $w_1$  を求めれば、

$$e_1(x, t) = \rho_1 |V_1|^2 \{ \cos^2(\omega t - \kappa_1 x + \delta_1) + r_V^2 \cos^2(\omega t + \kappa_1 x + \delta_1) \} \quad (66)$$

$$w_1(x, t) = \rho_1 c_1 |V_1|^2 \{ \cos^2(\omega t - \kappa_1 x + \delta_1) - r_V^2 \cos^2(\omega t + \kappa_1 x + \delta_1) \} \quad (67)$$

となる。これらは式 (41) を満たす。また、式 (67) の時間平均値を求めれば、合成音波の強さは

$$I_1(x) = \frac{1}{2} \rho_1 c_1 |V_1|^2 (1 - r_V^2) \quad (68)$$

となる。さらに、式 (57), (59), (58) を用いて変形すれば、

$$\begin{aligned} I_1(x < 0) &= \frac{1}{2} \rho_1 c_1 |V_1|^2 (1 - R) = \frac{1}{2} \rho_1 c_1 |V_1|^2 T = \frac{1}{2} \rho_2 c_2 |V_2|^2 \\ &= I_2(x > 0) \end{aligned} \quad (69)$$

が成り立ち、音波の強さは円筒内のどこでも同じであることがわかる。ここではエネルギーの散逸がない平面正弦波を想定しているので、これは当然の結果である。

#### §4 音響管の共鳴

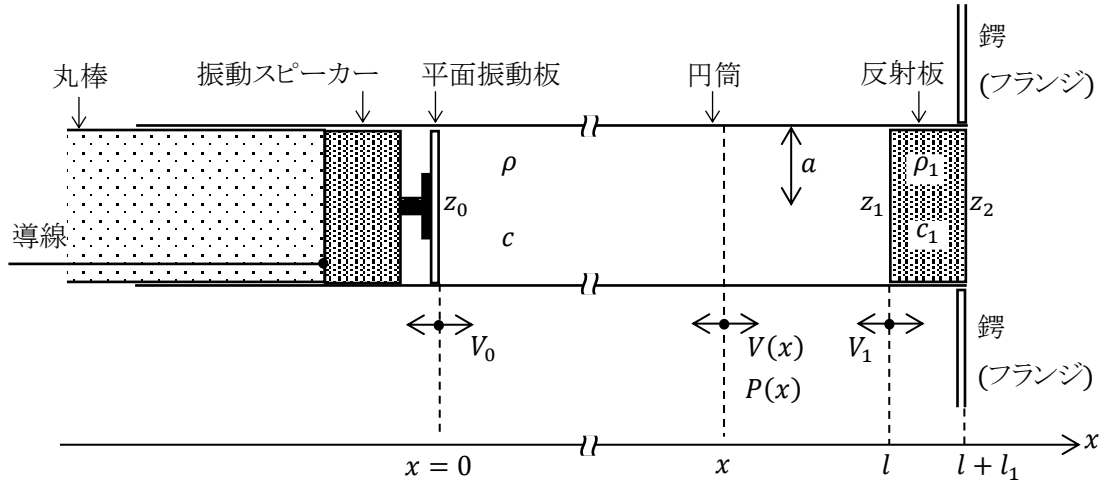


図 2

図 2 のように、口径が音波の波長より十分小さい円筒の右端に反射板を固定し、左端から丸棒に固定された振動スピーカーを差し込む。このように音源を取り付けた細長い筒を音響管という。振動スピーカーの平面振動板と反射板の間隔は可変で、いまその間隔が  $l$  になっているとする。丸棒は音響管から左側へ音波が漏れ出すのを抑えるために用いられている。振動スピーカーの角振動数を  $\omega$ 、振動速度の振幅を  $V_0$  とし、反射板の左表面から右側を見たときの固有音響インピーダンスを  $z_1$  とする。 $V_0$  は気柱共鳴の有無に関係なく一定に保たれているとする(注 1)。空気の粘性抵抗は無視でき、管の側面からのエネルギー散逸もないとする。振動スピーカーを作動させると管内には定常波が生じ、一部の音波は反射板を透過して管外へ出ていく。このとき、振動板から測った距離  $x$  ( $0 \leq x \leq l$ ) における空気の変位速度と音圧の振幅は、式 (21) と (22) より、

$$V(x) = j\kappa (\Phi_+ e^{-j\kappa x} - \Phi_- e^{j\kappa x}) \quad (70)$$

$$P(x) = j\rho\omega (\Phi_+ e^{-j\kappa x} + \Phi_- e^{j\kappa x}) \quad (71)$$



と表される。これらに対する境界条件は

$$V_0 = V(0) = j\kappa(\Phi_+ - \Phi_-) \quad (72)$$

$$z_1 = \frac{P(l)}{V(l)} = \frac{\rho\omega(\Phi_+ e^{-j\kappa l} + \Phi_- e^{j\kappa l})}{\kappa(\Phi_+ e^{-j\kappa l} - \Phi_- e^{j\kappa l})} \quad (73)$$

である。これら2式より  $\Phi_+$  と  $\Phi_-$  を求め、それらを式(70)と(71)に代入すれば、

$$V(x) = V_0 \frac{\rho c \cos \kappa(l-x) + j z_1 \sin \kappa(l-x)}{\rho c \cos \kappa l + j z_1 \sin \kappa l} \quad (74)$$

$$P(x) = \rho c V_0 \frac{z_1 \cos \kappa(l-x) + j \rho c \sin \kappa(l-x)}{\rho c \cos \kappa l + j z_1 \sin \kappa l} \quad (75)$$

を得る。式(74)と(75)より、振動板から右側を見たときの固有音響インピーダンス  $z_0$  は

$$z_0 = z(0) = \frac{P(0)}{V(0)} = \rho c \frac{z_1 \cos \kappa l + j \rho c \sin \kappa l}{\rho c \cos \kappa l + j z_1 \sin \kappa l} \quad (76)$$

となる。

いまもし反射板が完全に音波を反射するとすれば、 $V(l) = 0$ となるので、式(74)より、

$$0 = V_0 \frac{\rho c}{\rho c \cos \kappa l + j z_1 \sin \kappa l} \quad \text{よって } |z_1| = \infty \quad (77)$$

でなければならない。このとき式(74)と(75)は

$$V(x) = V_0 \frac{\sin \kappa(l-x)}{\sin \kappa l} \quad (78)$$

$$P(x) = -j \rho c V_0 \frac{\cos \kappa(l-x)}{\sin \kappa l} \quad (79)$$

となる。これらより、気柱の長さ  $l$  が  $\sin \kappa l \neq 0$  を満たす場合には、

$$\text{変位速度の腹の位置は, } x_n = l - (n - \frac{1}{2}) \frac{\pi}{\kappa} \text{ で, } V(x_n) = \pm \frac{V_0}{\sin \kappa l} \quad (80)$$

$$\text{音圧の腹の位置は, } x_n = l - n \frac{\pi}{\kappa} \text{ で, } P(x_n) = \pm j \frac{\rho c V_0}{\sin \kappa l} \quad (81)$$

となる。ただし  $n$  は  $0 \leq x_n \leq l$  を満たす整数である。

次に、 $l$  をゆっくり変化させて  $\sin \kappa l = 0$  となる位置に近づけると、これらの振幅は非常に大きくなり、共鳴が起こる。数式のうえでは振幅は無限大となるが、実際には空気の粘性による発熱と管の側面からのエネルギーの漏れがあるし、そもそも完全に  $V(l) = 0$  となることはないので、振幅は有限にとどまる。

さらに  $l$  を変化させて、 $\sin \kappa l = \pm 1$  となる位置に近づけると、変位速度と音圧の振幅はそれぞれ  $\pm V_0$ 、 $\pm j \rho c V_0$  となる。この合成波は振幅の小さな単なる定常波であって、共鳴ではない。これを反共鳴という人がいる。

## §5 音響管からの音波の漏れ

図2において、反射板の左表面から右側を見たときの固有音響インピーダンス  $z_1$  の絶対値が  $\infty$  でもなければ0でもない場合には、反射板から外部へ音波が漏れ出す。反射板のなかでエネルギーの散逸がないとすれば、反射板から外部へ漏れ出す音波の強さは反射板に入射する合成音波の強さに等しい。その強さと気柱の長さ  $l$  との関係を求める。まず、

$$z_1 = r_1 + j x_1 \quad (82)$$

とおけば、音響管内での音波の強さ  $I(x)$  は、

$$I(x) = \overline{p_R(x,t) v_R(x,t)} \quad (83)$$

$$= \frac{1}{4} \{P(x) V^*(x) + P^*(x) V(x)\} \quad (\text{証明は注2}) \quad (84)$$

$$= \frac{\frac{1}{2} r_1 |V_0|^2}{\left(\frac{|z_1|}{\rho c}\right)^2 \sin^2 \kappa l + \cos^2 \kappa l - 2\left(\frac{x_1}{\rho c}\right) \sin \kappa l \cos \kappa l} \quad (85)$$

となる。— は時間平均を表し、\* は複素共役を表す。 $I(x)$  は  $x$  に依存しないので、管内では音波の強さはどこでも同じである。

反射板の密度と厚さを  $\rho_1, l_1$  とし、反射板中での音速を  $c_1$  とすれば、 $z_1$  は式(76)の導出と同じようにして、

$$z_1 = \rho_1 c_1 \frac{z_2 \cos \kappa_1 l_1 + j \rho_1 c_1 \sin \kappa_1 l_1}{\rho_1 c_1 \cos \kappa_1 l_1 + j z_2 \sin \kappa_1 l_1} \quad (86)$$

となる。ただし、 $\kappa_1$  は反射板中の縦波の(角)波数、 $z_2$  は反射板の右表面を半径  $a$  の円形音源と見なしたときの固有放射インピーダンスで、

$$z_2 \cong \rho c \left\{ \frac{(\kappa a)^2}{2} + j \frac{8(\kappa a)}{3\pi} \right\} \equiv r_2 + j x_2 \quad (87)$$

と表される(注3)。この式の導出に当たっては、円形音源は無限に広がった剛体の鏝(フランジ)をもつとし、 $\kappa a \leq 1$  を仮定している。

式(86)から  $|z_1|^2$  と音響抵抗密度  $r_1$  と音響リアクタンス密度  $x_1$  を求めれば、

$$|z_1|^2 = (\rho_1 c_1)^2 \frac{(\rho_1 c_1 \sin \kappa_1 l_1)^2 + (|z_2| \cos \kappa_1 l_1)^2 + 2\rho_1 c_1 x_2 \sin \kappa_1 l_1 \cos \kappa_1 l_1}{(\rho_1 c_1 \cos \kappa_1 l_1)^2 + (|z_2| \sin \kappa_1 l_1)^2 - 2\rho_1 c_1 x_2 \sin \kappa_1 l_1 \cos \kappa_1 l_1} \quad (88)$$

$$r_1 = \rho_1 c_1 \frac{\rho_1 c_1 r_2}{(\rho_1 c_1 \cos \kappa_1 l_1)^2 + (|z_2| \sin \kappa_1 l_1)^2 - 2\rho_1 c_1 x_2 \sin \kappa_1 l_1 \cos \kappa_1 l_1} \quad (89)$$

$$x_1 = \rho_1 c_1 \frac{\{(\rho_1 c_1)^2 - |z_2|^2\} \sin \kappa_1 l_1 \cos \kappa_1 l_1 + \rho_1 c_1 x_2 (\cos^2 \kappa_1 l_1 - \sin^2 \kappa_1 l_1)}{(\rho_1 c_1 \cos \kappa_1 l_1)^2 + (|z_2| \sin \kappa_1 l_1)^2 - 2\rho_1 c_1 x_2 \sin \kappa_1 l_1 \cos \kappa_1 l_1} \quad (90)$$

となる。これらを式(85)に代入すれば、管外に漏れ出してくる音波の強さを  $l$  の関数として表す式を得る。

ここからは、具体例として文献2の実験で用いた音響管を取り上げ、式(85)の分母を独立変数  $l$  と数値係数で表す近似式を求める。

まず、管内空気の温度を 20°C とすれば、空気の固有音響インピーダンスは、

$$\rho c = (1.21 \text{ kg m}^{-3}) \times (344 \text{ m s}^{-1}) = 416 \text{ Pa s m}^{-1} \quad (91)$$

となる。温度を 25 °C にしても、この値からのずれは小さい。

音波の波長  $\lambda$  は、音響管の口径と長さを考慮して、 $0.2 \text{ m} \leq \lambda \leq 0.8 \text{ m}$  に制限した。その代表値として、ここでは  $\lambda = 0.5 \text{ m}$  を採用する。このとき音波の振動数と(角)波数は、

$$f = c / \lambda = 688 \text{ Hz}, \quad \kappa = 2\pi / \lambda = 12.6 \text{ m}^{-1} \quad (92)$$

となる。音響管の断面半径  $a$  は  $2.6 \times 10^{-2} \text{ m}$  であるので、

$$\kappa a = 0.327 \quad (93)$$

となる。

反射板の右表面での固有放射インピーダンス  $z_2$  の実部  $r_2$  と虚部  $x_2$  は、式 (87) より、

$$r_2 = \rho c \frac{(\kappa a)^2}{2} = 22.2 \text{ Pa s m}^{-1} \quad (94)$$

$$x_2 = \rho c \frac{8(\kappa a)}{3\pi} = 115 \text{ Pa s m}^{-1} \quad (95)$$

となり、

$$|z_2| = \sqrt{r_2^2 + x_2^2} = 118 \text{ Pa s m}^{-1} \quad (96)$$

を得る。

筆者の実験ではコルクの反射板を用いた。コルクの密度とヤング率は、[文献 3](#) によれば、

$$\rho (\text{コルク}) = 1.5 \times 10^2 \text{ kg m}^{-3}, \quad E (\text{コルク}) = 2.0 \times 10^7 \text{ Pa}$$

である。これらよりコルク棒を伝わる縦波の速さは、

$$c (\text{コルク}) = \sqrt{E (\text{コルク}) / \rho (\text{コルク})} = 365 \text{ m s}^{-1}$$

となる。ところが文献 4 には、

$$\rho (\text{コルク}) = 2.5 \times 10^2 \text{ kg m}^{-3}, \quad c (\text{コルク}) = 500 \text{ m s}^{-1}$$

という数値が載っている。これらの値はコルク板の成形の仕方によって大きく変化する。筆者が用いた反射板の比重は、水に浮かべる方法で測定したところ、0.2 であることがわかった。ヤング率が不明であるので、上記 2 つのデータの単純平均をとって、

$$\rho_1 = 2.0 \times 10^2 \text{ kg m}^{-3}, \quad c_1 = 433 \text{ m s}^{-1} \quad (97)$$

とした。このとき反射板の固有音響インピーダンスは

$$\rho_1 c_1 = 8.65 \times 10^4 \text{ Pa s m}^{-1} \quad (98)$$

となり、反射板中での音波の波長  $\lambda_1$  と(角)波数  $\kappa_1$  は、

$$\lambda_1 = 0.629 \text{ m}, \quad \kappa_1 = 9.99 \text{ m}^{-1} \quad (99)$$

となる。反射板の厚さは  $l_1 = 2.5 \times 10^{-2} \text{ m}$  であるので、

$$\kappa_1 l_1 = 0.250, \quad \sin \kappa_1 l_1 = 0.247 \dots, \quad \cos \kappa_1 l_1 = 0.968 \dots \quad (100)$$

である。これらの値を式 (88), (89), (90) に代入すれば、

$$r_1 = 23.7 \text{ Pa s m}^{-1} \quad (101)$$

$$|z_1| \approx x_1 = 2.22 \times 10^4 \text{ Pa s m}^{-1} \quad (102)$$

$$|z_1| - x_1 \approx \frac{r_1^2}{2|z_1|} = 0.0126 \text{ Pa s m}^{-1} \quad (103)$$

を得る。さらに、式 (91) と式 (102), (103) を式 (85) に代入すれば、

$$\frac{I(l)}{\frac{1}{2}r_1|V_0|^2} = \frac{1}{(a \sin \kappa l)^2 + \cos^2 \kappa l - 2b \sin \kappa l \cos \kappa l} \quad (104)$$

となる。ただし、 $\kappa = 12.6 \text{ m}^{-1}$ 、 $a \doteq b = 53.4$ 、 $a - b = 3.03 \times 10^{-5}$  である。

横軸に  $\kappa l$ 、縦軸に dB 目盛で測った  $I$ 、すなわち  $10 \log_{10} \left( \frac{I}{\frac{1}{2}r_1|V_0|^2} \right)$  をとって、式 (104) をグラフで表せば図 3 のようになる。

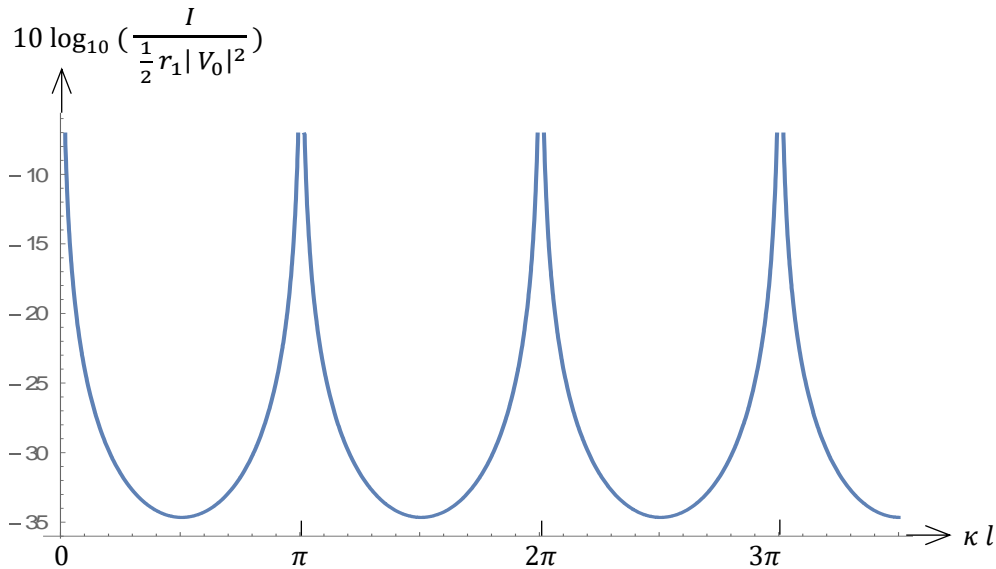


図 3

このグラフから、気柱が共鳴している ( $\kappa l \doteq \pi, 2\pi, 3\pi \dots$ ) のときに反射板から漏れ出す音の強さが最大になることがわかる。 $a \neq b$  であるので極大値は有限である。

この結果と本質的に同じ現象が次の例に見られる (文献 5)。二つの部屋の隔壁を通過して、一方の部屋の騒音が他方の部屋に伝わってくる場合、騒音を防ごうとして壁を二重にすると、二重壁の間の固有振動数に等しい振動数の音が共鳴を起こし、隣の部屋で聞こえる騒音がかえってひどくなることもある。騒音を軽減するためには、壁を二重にするよりも壁の厚さを 2 倍にする方が効果的なのである。

式 (104) は  $\kappa l$  の周期関数 (周期  $\pi$ ) である。気柱の長さ  $l$  を 0 から大きくしていくとき、 $n$  回目に  $I$  が極大となるときの  $l$  を  $l^{(n)}$  とおけば、

$$\Delta l := l^{(n+1)} - l^{(n)} = \pi/\kappa = \lambda/2 \quad (\lambda \text{ は音波の波長}) \quad (105)$$

となる。 $a \neq b$  であるので、 $\kappa l^{(n)}$  は  $n\pi$  から少しずれる。図 3 の拡大図を見れば、そのずれは、

$$\kappa l^{(1)} - \pi = 0.006$$

となっている。これより

$$l^{(1)} - \Delta l \sim 0.001 \lambda$$

を得る。気柱が共鳴して反射板から漏れ出す音波の強さが極大となる時、振動板に最も近い定常波の節は、振動板から気柱に向かって  $\lambda$  の 0.1% 程度離れたところにある。このずれを実験で検出することはかなり難しいと思われる。

(文献 1)

<http://www.eonet.ne.jp/~excitingphysics/danseitaibo.pdf>

(文献 2)

<http://www.eonet.ne.jp/~excitingphysics/kundt1.pdf>

(文献 3)

<https://www.makeitfrom.com/material-properties/Cork/>

(文献 4)

西巻 正郎 : 「電気音響振動学」 コロナ社 1971 年(第 15 版), p38

(文献 5)

大野 進一・山崎 徹 : 「機械音響工学」 森北出版 2010 年, p124

(注 1)

実際には、 $V_0$  の値は気柱共鳴の有無によってかなり大きく変化する。これについては次回に説明するが、共鳴時と反共鳴時での  $V_0$  の値の比は、実際の気柱共鳴実験の場合、10 程度である。このとき、図 3 の極大値と極小値の差が 20dB ほど小さくなるだけで、曲線の形はほとんど変化しない。

(注 2)

一般的に、音響管中の複素正弦進行波の変位速度と音圧を

$$v(x, t) = V(x) e^{j(\omega t - \kappa x)} = |V(x)| e^{j(\omega t - \kappa x + \alpha_V)}$$

$$p(x, t) = P(x) e^{j(\omega t - \kappa x)} = |P(x)| e^{j(\omega t - \kappa x + \alpha_P)}$$

とおけば、

$$\overline{p_R(x, t) v_R(x, t)} = \overline{|P(x)| \cos(\omega t - \kappa x + \alpha_P) |V(x)| \cos(\omega t - \kappa x + \alpha_V)}$$

$$= \frac{1}{2} |P(x)| |V(x)| \cos(\alpha_P - \alpha_V)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} |P(x)| |V(x)| \{ e^{j(\alpha_P - \alpha_V)} + e^{-j(\alpha_P - \alpha_V)} \} \\
&= \frac{1}{4} \{ |P(x)| e^{j\alpha_P} |V(x)| e^{-j\alpha_V} + |P(x)| e^{-j\alpha_P} |V(x)| e^{j\alpha_V} \} \\
&= \frac{1}{4} \{ P(x) V^*(x) + P^*(x) V(x) \}
\end{aligned}$$

となる。

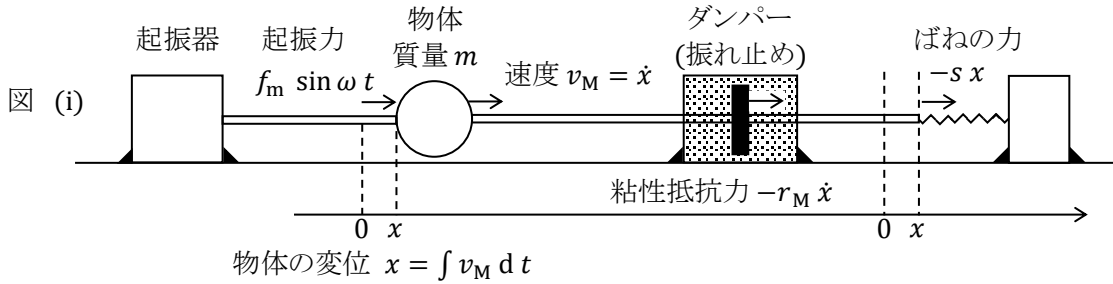
(注3)

円形振動板が空気におよぼす力の反作用  $f$  と振動板の振動速度  $v$  の比  $f/v$  を振動板の放射インピーダンスという。空気が振動板におよぼす力  $f$  を振動板の面積で割ったものは空気が振動板におよぼす平均音圧  $p$  となる。 $p/v$  を振動板の固有放射インピーダンスという。式(87)の証明は標準的な音響学の教科書を見れば載っているが、筆者が読んだものなかでは文献5(p41～p53)の説明が丁寧である。

【補足】

次の図 (i) (ii) (iii) に示す 3 つの振動系に対する基本方程式は数学的には同じであるので、対応する物理量の時間変化は同じである。

(i) 起振力  $f(x) = f_m \sin \omega t$  とばねの力と粘性抵抗力を受けて振動する物体



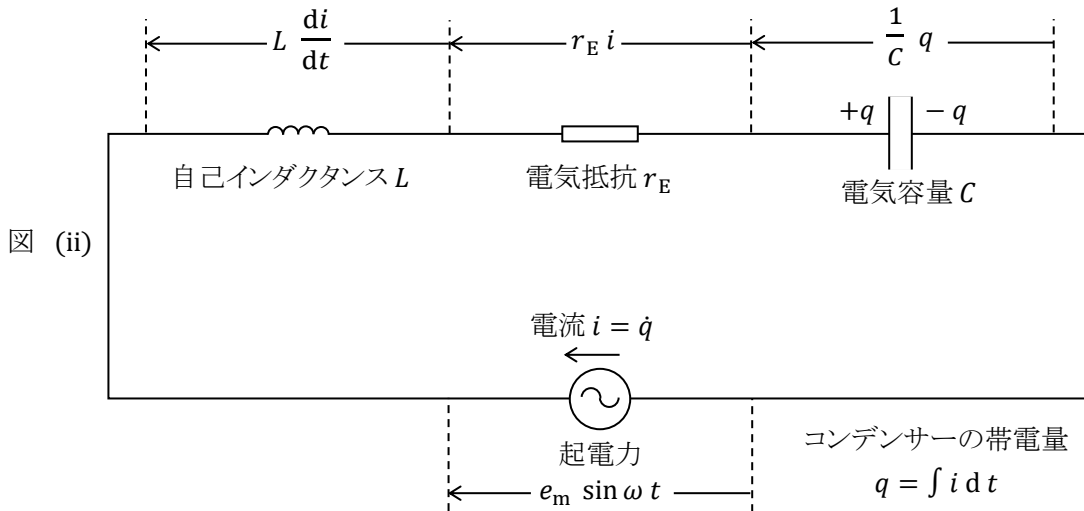
物体の運動方程式より次式を得る。

$$f_m \sin \omega t = m \ddot{x} + r_M \dot{x} + s x$$

$$= m \frac{d v_M}{d t} + r_M v_M + \frac{1}{C_M} \int v_M dt$$

振動工学の分野では、ばね定数  $s$  をスティフネス といひ、その逆数  $C_M$  をコンプライアンス といひ。

(ii) 起電力  $e(t) = e_m \sin \omega t$  によって R L C 直列回路を流れる交流電流



回路の式 (キルヒホッフの第 2 法則) より次式を得る。

$$e_m \sin \omega t = L \frac{d i}{d t} + r_E i + \frac{1}{C} \int i dt$$

$$= L \ddot{q} + r_E \dot{q} + \frac{1}{C} q$$

(iii) 音圧  $p(t) = p_m \sin \omega t$  と容器内の空気からの弾性力を受けて振動する細管内の空気

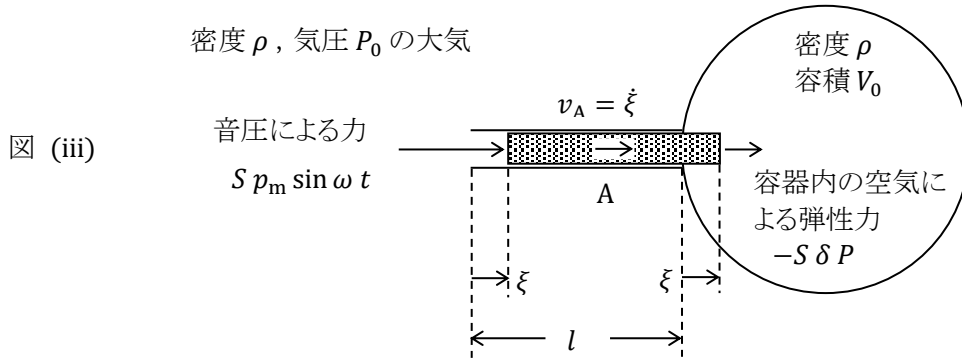


図 (iii) のように、小さな容器 (容積  $V_0$ ) に細管 (長さ  $l$ , 断面積  $S$ ) を取り付ける。音波がないとき、気圧は  $P_0$  で細管内の空気  $A$  は静止している。大気中から波長  $\lambda$  の音波が伝わってきて、空気  $A$  に音圧による力  $S p_m \sin \omega t$  がはたらくと、空気  $A$  は一体として振動を始める。その変位が  $\xi$  ( $\ll l \ll \lambda$ ) になったとき、容器内の空気の圧力と体積がそれぞれ  $\delta P, \delta V$  だけ変化したとすれば、ポアソンの断熱式より、

$$\frac{\delta P}{P_0} + \gamma \frac{\delta V}{V_0} = 0 \quad (\gamma \text{ は空気の比熱比})$$

が成り立つ。これと  $\delta V = -S \xi$  より、

$$\delta P = \frac{\gamma P_0 S}{V_0} \xi$$

を得る。よって、空気  $A$  が容器内の空気から受ける弾性力は

$$-S \delta P = -\frac{\gamma P_0 S^2}{V_0} \xi$$

となる。さらに、空気  $A$  が細管から抵抗力  $-R_A \dot{\xi}$  を受けるとすれば、その運動方程式は

$$(\rho S l) \ddot{\xi} = S p_m \sin \omega t - R_A \dot{\xi} - \frac{\gamma P_0 S^2}{V_0} \xi$$

と表される。これを書き換えれば、

$$\begin{aligned} p_m \sin \omega t &= m_A \ddot{\xi} + r_A \dot{\xi} + s_A \xi \\ &= m_A \frac{d v_A}{dt} + r_A v_A + \frac{1}{C_A} \int v_A dt \end{aligned}$$

となる。ただし、音速を  $c$  として、

$$m_A = \rho l, \quad r_A = \frac{R_A}{S}, \quad s_A = \frac{\gamma P_0 S}{V_0} = \frac{\rho c^2 S}{V_0}, \quad C_A = \frac{1}{s_A}$$

である。音響学では  $m_A$  をイナータンス,  $r_A$  を音響抵抗密度,  $s_A$  を音響スティフネス,  $C_A$  を音響キャパシタンスといい、 $p / v_A$  を固有 (または特性, または比) 音響インピーダンスあるいは音響インピーダンス密度という。



これら3つの振動系の基本方程式を比べれば、それぞれの物理量の間に応関係があることがわかる。この対応関係から  $p/v_A$  にインピーダンスという用語が用いられるようになった。

機械振動系	電気振動系	音響振動系
質量 $m$	自己インダクタンス $L$	イナータンス $m_A$
変位 $x$	コンデンサーの帯電量 $q$	空気の変位 $\xi$
速度 $v_M = \dot{x}$	電流 $i = \dot{q}$	変位速度 $v_A = \dot{\xi}$
起振力 $f$	起電力 $e$	音圧 $p$
機械インピーダンス	電気インピーダンス	固有音響インピーダンス
$z_M = \frac{f}{v_M}$	$z_E = \frac{e}{i}$	$z_A = \frac{p}{v_A}$
機械抵抗 $r_M$	電気抵抗 $r_E$	音響抵抗密度 $r_A$
スティフネス $s$		音響スティフネス $s_A$
コンプライアンス $C_M = \frac{1}{s}$	電気容量(キャパシタンス) $C$	音響キャパシタンス $C_A = \frac{1}{s_A}$
機械リアクタンス $x_M$	リアクタンス $x_E$	音響リアクタンス密度 $x_A$
$= m\omega - \frac{s}{\omega}$	$= L\omega - \frac{1}{C\omega}$	$= m_A\omega - \frac{s_A}{\omega}$
平均消費エネルギー流量 $\overline{w_M}$	平均消費電力 $\overline{w_E}$	平均エネルギー流量密度 $\overline{w_A}$
$= \frac{1}{2} r_M  V_M ^2$	$= \frac{1}{2} r_E  I ^2$	$= \frac{1}{2} r_A  V_A ^2$
$V_M$ は $v_M$ の複素振幅	$I$ は $i$ の複素振幅	$V_A$ は $v_A$ の複素振幅
共振角振動数 $\omega_M$	共振角周波数 $\omega_E$	共鳴角振動数 $\omega_A$
$= \sqrt{\frac{s}{m}}$	$= \sqrt{\frac{1}{LC}}$	$= \sqrt{\frac{s_A}{m_A}} = \sqrt{\frac{c^2 S}{V_0 l}}$

「熱中物理」に掲載されている論文の要約

は [こちらへ](#)