クントの実験に関していまだによくわかっていないこと (1)　（改訂版）

斉藤　全弘

§1　気柱共鳴

気柱共鳴が生じているとき，管内にばらまかれた微粒子（コルクの粉，石松子，発泡スチロールの小球など）が定常波の節か腹に集まってくる。この現象を用いて音波の波長を測定する実験をクントの実験という。2010 年度の入試問題で，東京大学と京都大学が同じ構造の気柱共鳴管を用いたクントの実験を題材として取り上げた。以下にその抜粋と筆者の解答を記す。

東京大学 (2010 年)　　(下線は筆者による)

管の中では気柱共鳴という現象が起こるが，そのときの振動数を固有振動数と呼ぶ。なお，以下で用いる管は細いので，開口端補正は無視する。

I　は省略

II　長さ 1m の透明で細長い管の左端に膜を張り，この膜を外部からの電流によって<u>微小に振動させ</u>，管の中に任意の振動数の音波を発生できるようにした。管は水平に置かれ，内部には細かなコルクの粉が少量まかれていて，空気の振動の様子が見えるようになっている。管の右端をふたで閉じて，音波の振動数をゆっくり変化させた。振動数を 400Hz から 700Hz まで変化させたとき，519Hz と 692Hz で共鳴が起こり，空気の振動の腹と節がコルクの粉の分布ではっきりと見えた。なお，<u>他の振動数では共鳴は起こっていない</u>。

(1)　692Hz での共鳴のときの空気の振動の節の位置を管の右端からの距離で答えよ。

(2)　この条件を用いて，音速 V を求めよ。

以下省略

［ 解答 ］

(1)　膜を微小に振動させるという表現から，気柱が共鳴しているとき左端は実質的に定常波の節になる，と出題者は考えていることがわかる。右端は固定端であるから節になっている。このとき管の長さを l , n 倍振動の振動数を f_n とすると，$f_n = nV/(2l)$ となる。実験結果から，

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{n+1}{n} = \frac{692}{519} = \frac{4}{3} \qquad \therefore\ n = 3$$

を得る。$f_4 = 692\text{Hz}$ の共鳴は 4 倍振動であるから，管内に定常波の腹が 4 つある。よって，節の位置は右端より，0m , 0.25m , 0.50m , 0.75m , 1m のところにある。

(2)　$$V = \frac{2l\,f_4}{4} = 346\,\text{m/s}$$

京都大学 (2010 年)　　　(下線は筆者による)

図 1 に示すように，一端に振動板 (スピーカー) を取り付けた円筒形の透明な容器に，ふたをして空気を密閉し，水平に置いた。ふたは，容器内の気圧が外気圧と等しくなるように水平方向 (図 1 の x 方向) に動くが，音波によって振動することはないとする。また，この容器の内壁には，はじめ，軽い粉が水平方向に一様に薄く置かれている。容器内の空気は理想気体であるとする。

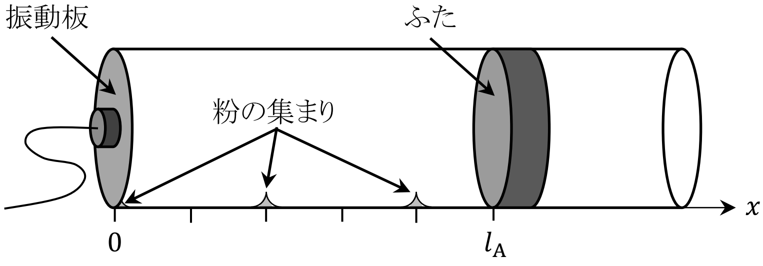


図　1

まず，容器内の空気の絶対温度を T_A にした。このとき，気柱の長さ (振動板からふたまでの距離) が l_A になった。この状態で，振動板から単一振動数の音を発し， その振動数を変化させていったところ，振動数が f のとき，図 1 に示すように容器内の 3 ヶ所 (うち 1 ヶ所は振動板近傍) に等間隔に粉が集まり，気柱が共鳴を起こしていることがわかった。なお，図 1 の x 軸は，気柱の左端を原点 $(x = 0)$ とした気柱の水平方向の座標軸であり，目盛りは $l_A/5$ の間隔で付けてある。

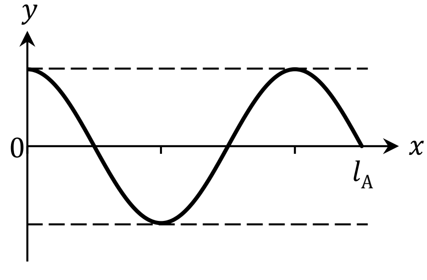
問 1　粉の集まりの中心の位置 (振動板近傍の集まりについては，振動板の位置 $x = 0$) は，3 ヶ所とも共鳴の定常波の腹の位置である可能性と，3 ヶ所とも節の位置である可能性がある。また，この気柱の右端のふたは固定端であると考えてよいとする。気柱に生じた定常波による，ある時刻における各 x での空気の変位 y を，解答用紙のグラフに記入せよ。なお，グラフ中の破線は，その時刻における腹の位置での空気の変位を示す。空気の変位 y は x 軸の正の向きを正とする。

気柱の共鳴音波の波長 λ_A および気柱内の音速 V_A は，l_A と f を用いて，それぞれ $\lambda_A =$ $\boxed{\text{あ}}$ ，$V_A =$ $\boxed{\text{い}}$ と表される。なお，この気柱が共鳴を起こす最も低い振動数は f を用いて $\boxed{\text{う}}$ と表される。

以下省略

[解答]

問 1　右図のとおり



右端は固定端であるから定常波の節の位置になる。よって，この実験では粉は定常波の腹の位置に集まっている。

(あ)　$\lambda_A = \boxed{\frac{4}{5}\,l_A}$　　(い)　$V_A = \boxed{\frac{4}{5}\,l_A f}$

(う) 左端が腹で右端が節となる定常波が生じることを共鳴と呼ぶならば，共鳴を起こす最も長い波長 $\lambda_{\max}$ は $4\,l_{\mathrm{A}}$ である。よって，最も低い振動数は

$$f_{\min} = \frac{V_{\mathrm{A}}}{\lambda_{\max}} = \boxed{\frac{f}{5}}$$

問題文の下線部からわかるように，東大の出題者は波源の位置が定常波の腹となるような共鳴はないとしているのに対して，京大の出題者はそれがあるとして問題を作成している。京大の問題が扱っているような現象は実際に起こりうるが，それは共鳴ではない。京大の出題者は共鳴という言葉を使い間違えたのである。これについては次々回に説明する。共鳴の定義をなおざりにして，京大の問題文を鵜呑みにすると，次の入試問題の解答と受験生に対する解説をどのようにすればよいのか迷ってしまう。

首都大学東京 (2013 年)

問 1 ，問 2 は省略

問 3 図 2 のような，なめらかに動かすことのできるピストンをもつシリンダーの内部に 1 モルの単原子分子理想気体が封入されている。シリンダー内の絶対温度は T であり，ピストンの左端は位置 O にある。シリンダー左端の外側にスピーカーを取り付け，シリンダー内に振動数 f の音波を発生させる。T を一定に保ちながらピストンをゆっくり左に動かしたところ，共鳴が生じることはなかった。T を一定に保ちながらピストンを元の位置 O に戻し，今度は，T を一定に保ちながらゆっくり右に動かしたところ，図 3 のように，ピストンの左端がある位置 O_1 に来たときに最初の共鳴が観測された。T を一定に保ちながら，ピストンを O_1 からさらに右に動かしたところ，その左端がある位置 O_2 に来たときに二回目の共鳴が観測された。単原子分子理想気体中の音速 V は，絶対温度 T と定数 a を用いて $V = a\sqrt{T}$ と表されるとする。理想気体 1 モルの質量を M ，気体定数を R ，ピストンの断面積を S として，次の問いに答えなさい。

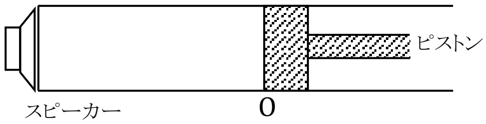


図 2

図 3

(1) ピストンの左端が位置 O_1 にあるときのシリンダー内の圧力を a , f , R , S , T を用いて表しなさい。

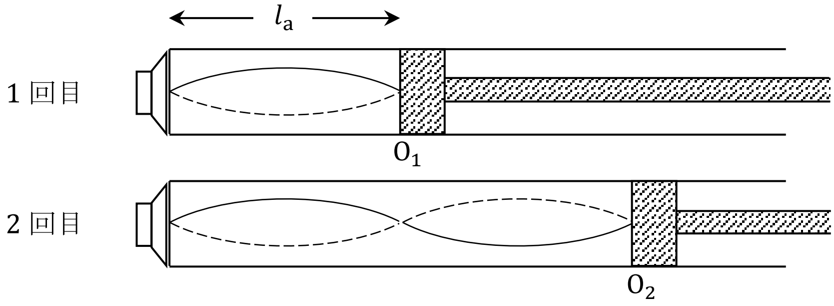
(2) ピストンの左端が位置 O_2 にあるときのシリンダー内の圧力は，(1) の圧力の何倍か。数値で答えなさい。

以下省略

[解答]

(a) 東大の出題者が想定している気柱共鳴であれば，1 回目と 2 回目の共鳴が生じているときの

変位の定常波は，横波表示で次の図のようになる。



(1)　1 回目の共鳴のとき，気柱の長さ l_a は音波の波長を λ として，

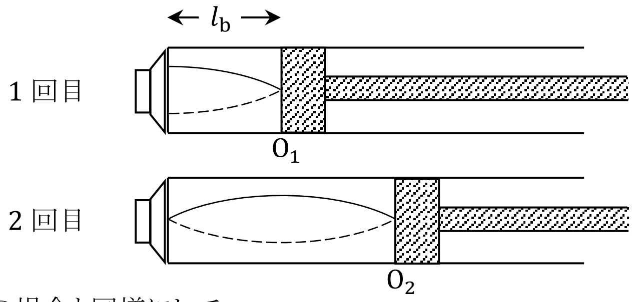
$$l_a = \frac{1}{2}\lambda = \frac{1}{2}\frac{V}{f} = \frac{a\sqrt{T}}{2f}$$

このときシリンダー内の圧力 p_{a1} は，

$$p_{a1} = \frac{R\,T}{l_a S} = \boxed{\frac{2fR\sqrt{T}}{a\,S}}$$

(2)　ピストンを動かすときシリンダーの内部と外部の間に気体の出入りはない，と作問者は暗黙のうちに仮定している。1 回目の共鳴から 2 回目の共鳴までの間に，シリンダー内の気体は温度一定のまま体積が 2 倍に膨張するので，ボイルの法則より圧力は $\boxed{\frac{1}{2}}$ 倍になる。

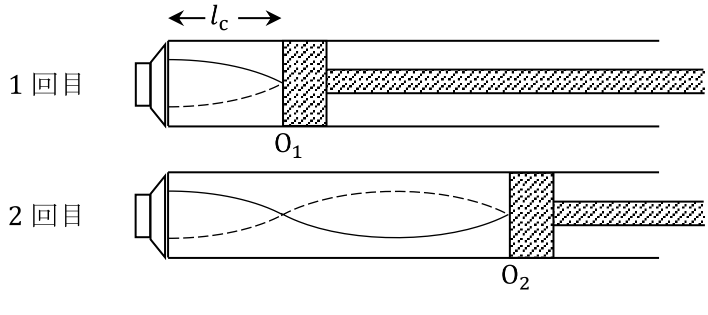
(b)　京大の出題者が想定している気柱共鳴であれば，1 回目と 2 回目の共鳴が生じているときの変位の定常波は次の図のようになる。



上記の (a) の場合と同様にして，

(1)　$l_b = \frac{1}{4}\lambda = \frac{a\sqrt{T}}{4f}$　，　$p_{b1} = \boxed{\frac{4fR\sqrt{T}}{aS}}$　　(2)　$\boxed{\frac{1}{2}}$ 倍

(c)　もしかすると，次のような可能性を考える人がいるかもしれない。



この場合には,

(1) $l_{\mathrm{c}} = \dfrac{a\sqrt{T}}{4f}$, $p_{\mathrm{c1}} = \dfrac{4fR\sqrt{T}}{aS}$ (2) $\dfrac{1}{3}$ 倍

となる。しかし，筆者はこの可能性はないと思う。スピーカーの振動面のところが実質的な節となる定常波はありえないという理由を思いつかないからである。

正解は(a)であり, (b)と(c)は間違いである。

§2 試行実験

実際に気柱共鳴が生じているときに，振動板と定常波の節または腹の位置関係がどのようになっているのかを検証するために，実験を試みた。円筒管の一端にダイナミックスピーカーを固定し，他端からコルクの可動反射板 (厚さ 25mm) を差し入れて気柱の長さを変えてみたのであるが，共鳴が生じていると思われる長さにしても，ところどころで封入した発泡スチロールの小球 (直径 2 ～ 3 mm) がわずかに振動するだけで，その分布に縞模様を見ることはできなかった。出力不足と外部への音波の漏れ出しが原因と思われるが，詳細はわからない。出力を最大にしたところ，スピーカーが壊れてしまった。

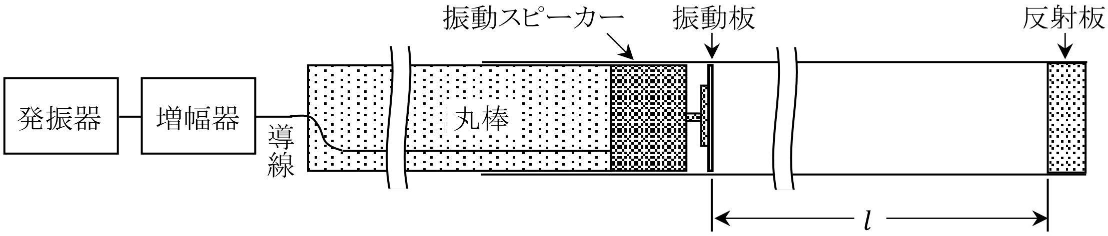
トレイサーの微粒子が動き出して縞模様を形成する条件は,

(1) 音波の強さと振動数
(2) 微粒子の大きさと形と密度
(3) 微粒子間の相互作用
(4) 微粒子と管壁の相互作用

などに依存すると思われるが，具体的な条件式についてはよくわかっていない。

あれこれと試行錯誤しながら実験をしていたとき，気柱の長さを変化させると，反射板を透過して管外へ漏れ出してくる音の大きさが，はっきりと聞き取れる程度に変化することに気がついた。漏れ出る音の大きさは管内の気柱が共鳴しているときに最大になると考えられるので，この点に注目して定常波の節の間隔を測定することにした。この方法が妥当であることはほとんど自明であるのだが，その理論的裏付けについては次回に論じる。クントの実験では，共鳴しているときに微粒子の縞模様を目で見て定常波の半波長を測定するのに対して，この実験では，共鳴しているときに漏れ出してくる音の大きさを耳で聞いて定常波の半波長を測定するのである (注 1) 。

実験装置は下図のとおりである。



このような実験の振動源としては，円錐形の放射面をもつダイナミックスピーカーを用いることが多いのだが，この実験では東大と京大の入試問題に近づけるために，平面の放射面を可能にする振動スピーカーを用いることにした。その可動板に直径 50 mm，厚さ ～ 1 mm の厚紙を貼り付けて振動板とした。図のように，アクリル管 (内径 52 mm，肉厚 4 mm，長さ 1000 mm) の右端をコルクの反射板 (直径 50 mm，厚さ 25 mm) で閉じ，左端から丸棒 (直径 50 mm，長さ 910 mm) の先端に固定した振動スピーカーを差し入れ，振動板と反射板の間隔 l を変えられるようにした。丸棒 (木製) は音波が左端から漏れ出すのを抑えるために用いた。低音量で実験をしたので，トレイサーの微粒子は管に封入していない (注 2) 。

実験の手順は次のとおりである。発振器の振動数 f と増幅器の出力を一定に保ち，l を 0 付近からゆっくり増加させて，反射板から漏れ出してくる音の大きさが n 回目に大きくなるときの l の値 l_n を巻き尺で読み取る。f を変えて同じ操作を繰り返す。実験補助者と二人で交互に合計 10 回測定した値の平均値 $\overline{l_n}$，$\overline{\Delta l_{n+1,\,n}} = \overline{l_{n+1} - l_n}$ とこれらの値から求まる音速は次のようになった。

(1) $f = 694\mathrm{Hz}$ の場合

$\overline{l_1} = 0.253 \pm 0.003(\mathrm{m})$， $\overline{l_2} = 0.502 \pm 0.003\ (\mathrm{m})$

$\overline{l_3} = 0.752 \pm 0.004(\mathrm{m})$

$\overline{\Delta l_{21}} = 0.249 \pm 0.003(\mathrm{m})$， $\overline{\Delta l_{32}} = 0.250 \pm 0.005(\mathrm{m})$

Δl_{21} と Δl_{32} を合わせた全体の平均値 $\bar{\Delta l} = 0.250 \pm 0.004\ (\mathrm{m})$

東大の出題者が想定している状況では，音波の波長 λ は $2\bar{\Delta l}$ で，そのときの音速 c は，

$c = \lambda f = 346 \pm 5(\mathrm{m/s})$

(2) $f = 504\mathrm{Hz}$ の場合

$\overline{l_1} = 0.350 \pm 0.007\ (\mathrm{m})$， $\overline{l_2} = 0.691 \pm 0.006(\mathrm{m})$

$\overline{\Delta l_{21}} = 0.341 \pm 0.005(\mathrm{m}) \equiv \bar{\Delta l}$

(1) と同様にして，音速 c は，

$c = \lambda f = 344 \pm 5\ (\mathrm{m/s})$

実験中の室温は 24 ℃で，これに対する乾燥大気中の音速の理論値 c_{th} は，

$$\begin{aligned} c_{\mathrm{th}} &= 331.45(\mathrm{m/s}) + 0.607(\mathrm{m/s/℃}) \times 24(℃) \\ &= 346(\mathrm{m/s}) \end{aligned}$$

である。この値と実験(2)の測定値との差は誤差の範囲内にある。かなり粗雑な実験ではあるが，結果は満足できるものと考える。京大の出題者が想定している状況であれば，音波の波長 λ は $4\bar{\Delta l}$ となり，これから得られる音速は上で求めた値の 2 倍になるので，この状況は受け入れられない。

上記の数値が示すように，$\overline{l_1}$ が $\overline{\Delta l}$ よりわずかに大きくなっている。誤差が大きいのでこの差が有意であるのかどうかわからない。誤差の範囲内で両者は等しいとみれば，東大の出題者が想定しているように，この実験では振動板のところに定常波の実質的な節が生じている，と考えられる。しかし，もしこの差が有意であれば，定常波の節が振動板から気柱の向きに波長の 1%程度離れたところに生じていることになり，そのずれは波長が長いほど大きくなることを説明しなければならない。理論による説明は可能であるが，もう少し精度のよい実験結果が得られた後にしたい（注 3）。

(注 1)

定常波の節や腹の位置を見定める方法としては，他にも，

(i) 管軸に沿っての圧力変化を微小なマイクロフォンで測定する

(ii) 電流を流したニクロム線を管軸に沿って張り，空気の速度振幅の違いによって生じるニクロム線の明暗模様の間隔を測定する

などがある。耳で聞く測定方法は手軽であるし，教科書などで見たことがないので試みることにした。

(注 2)

クントの実験は騒音との闘いである。最初の装置で実験をしていたとき，簡易騒音計で測った室内の騒音は 85 dB 前後であった。庭で鳴いている 3 匹のクマゼミから 1 ～ 2 m 離れたところの騒音も同じくらいであった。理科教材の販売会社に問い合わせたところ，発泡スチロール小球の縞模様が見られるとき，1 m 離れたところで 94 dB の音がするとのことであった。筆者の装置はやはり出力不足であったようである。しかし，住宅地で 90 dB 以上の騒音を出し続けたら，近所から苦情が出るのは目に見えている。発生する騒音を抑えるかあるいは室外へ漏れ出すのを防ぐ方法はないものかと一年近く苦慮している。

(注 3)

その後（2020/01/12），§2 で述べた試行実験の測定方法をもう少し定量的なものに変更して，再度実験を試みた。反射板から漏れ出す音の大きさを耳で判断する代わりに，簡易騒音計を管軸に沿って反射板から外側へ 1cm 離れたところに置き，透過音の大きさを dB 目盛で読み取った。測定結果は下図に与えてある。横軸は気柱の長さ l で，縦軸は簡易騒音計の読み I である。振動スピーカーの振動数 f は 694Hz で，室温は 17℃ であった。

グラフから読み取った共鳴時の気柱の長さは，

$$l_1 = 0.243\mathrm{m}\,, \qquad l_2 = 0.487\mathrm{m}\,, \qquad l_3 = 0.735\mathrm{m}$$

である。これらより，

$$\Delta l_{21} = l_2 - l_1 = 0.244\mathrm{m}, \qquad \Delta l_{32} = l_3 - l_2 = 0.248\mathrm{m}$$

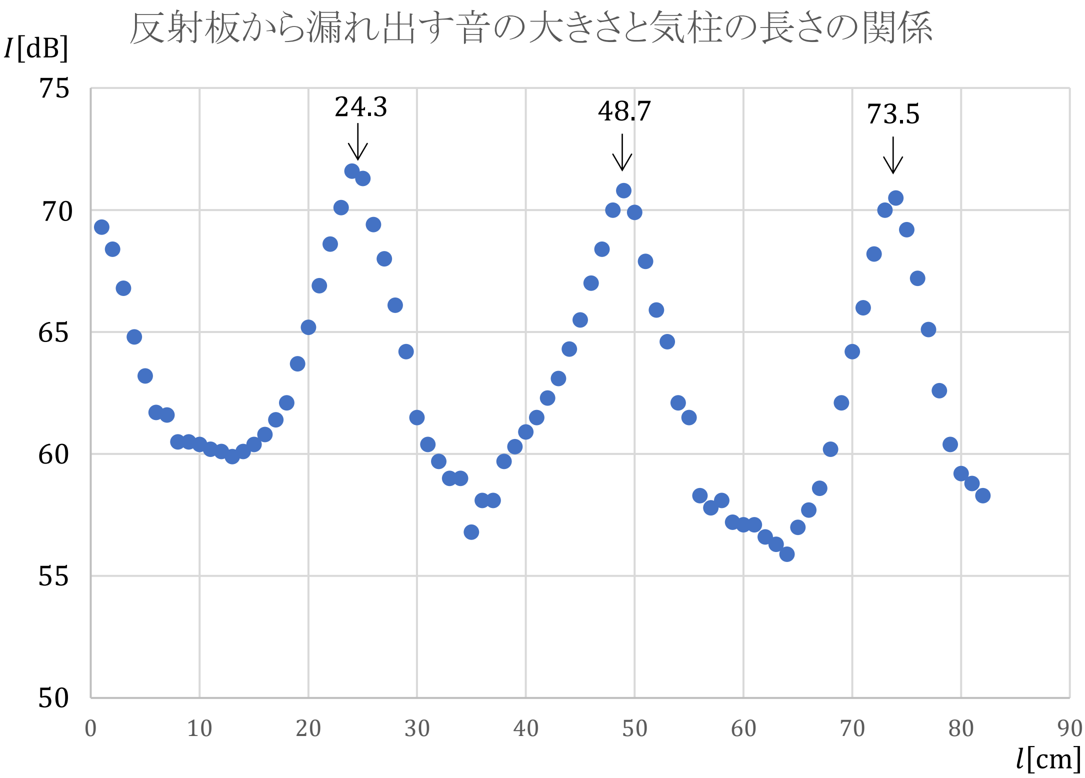
$$\overline{\Delta l} = \frac{1}{2}(\Delta l_{21} + \Delta l_{32}) = 0.246\mathrm{m}$$

$$\text{音速}\quad c = 2\,\overline{\Delta l}\, f = 341.4\mathrm{m/s}$$

を得る。乾燥大気中の音速の理論値は $c_{\mathrm{th}} = 341.8\mathrm{m/s}$ である。このような雑な実験にしては，測定値と理論値の一致は上出来といえる。

ただし，この実験では $l_1 < \overline{\Delta l}$ となっており，§2 の試行実験とは不等号の向きが逆になっている。いずれの実験もかなりの誤差を伴うので，l_1 と $\overline{\Delta l}$ の大小関係についてはまだ確定的なことは言えない。

理論から得られる l_1 と Δl の間の関係式については，次回にのべる。



「熱中物理」に掲載されている論文の要約 は こちらへ