

図1の I , II , III は一様で等方的な媒質で、屈折率はそれぞれ  $n_1, n_2, n_3$  である。媒質 II の厚さを  $d$  とする。波長  $\lambda$  の平面光波が I と II の境界面に入射角  $\theta_1$  で入射して、その一部が反射し、残りが II へ屈折する。その屈折波は II と III の境界面で一部が III へ屈折し、残りが反射する。その反射波は 2 つの境界面で反射を繰り返しながら、少しずつ I と III へ出ていく。このような無数の平面波が重なって、反射角  $\theta_1'$  の合成反射波と透過角  $\theta_3$  の合成透過波が形成される。II のなかには  $\theta_2$  方向と  $\theta_2'$  方向に伝わる合成波が重なっている。

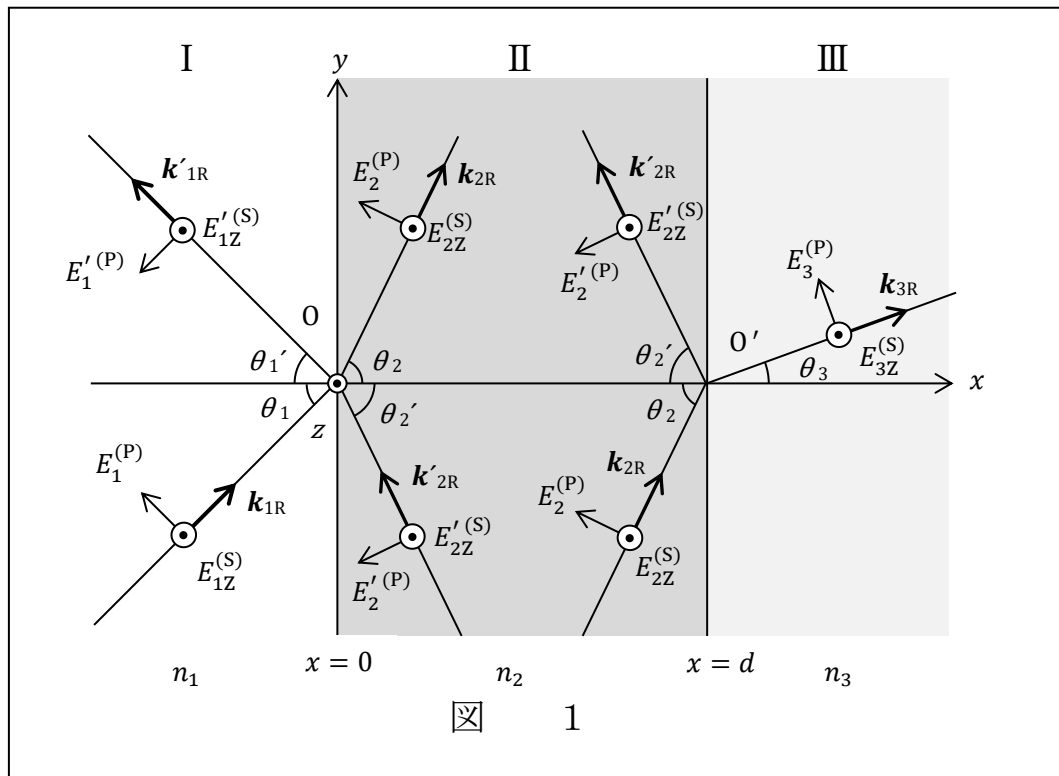


図1のように座標軸  $(x, y, z)$  を設定し、太い矢印の向きに伝わる入射波と各合成波の波数ベクトルを  $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}'_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}'_2, \mathbf{k}_3$  とする。これらは一般的には複素ベクトルである。その実部 (添字 R で表す) が光波の伝播方向を表すので、実部の  $x$  成分,  $y$  成分と伝播方向を表す角度の間には、

$$\tan \theta_j = \frac{k_{jyR}}{k_{jxR}} \quad (j = 1, 2, 3) \quad ①$$

$$\tan \theta_j' = -\frac{k'_{jyR}}{k'_{jxR}} \quad (j = 1, 2) \quad ②$$

が成り立つ。各領域 ( $j = 1, 2, 3$ ) での平面波の複素表示による電場は、時刻を  $t$ , 角振動数を  $\omega$  として、

$$\mathbf{E}_j = \mathbf{A}_j \exp(i[\omega t - k_{jx}x - k_{jy}y]) \quad (j = 1, 2) \quad ③$$

$$\mathbf{E}'_j = \mathbf{A}'_j \exp(i[\omega t - k'_{jx}x - k'_{jy}y]) \quad (j = 1, 2) \quad ④$$

$$\mathbf{E}_3 = \mathbf{A}_3 \exp(i[\omega t - k_{3x}(x - d) - k_{3y}y]) \quad ⑤$$

と表される。振幅  $A_j, A'_j, A_3$  は複素ベクトルで、その偏角はそれぞれの光波の原点  $O$  ( $E_3$  の場合は点  $O'$ ) での初期位相になっている。このような平面波の場合、磁束密度  $\mathbf{B}$  と電束密度  $\mathbf{D}$  は、

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \quad (6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 c^2 (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (7)$$

を満たしているので、

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\omega} (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \quad (8)$$

$$\mathbf{D} = -\frac{\varepsilon_0 c^2}{\omega} (\mathbf{k} \times \mathbf{B}) = \varepsilon \mathbf{E} \quad (9)$$

と表される。ここに、 $\varepsilon_0$  は真空の誘電率、 $c$  は真空での光速、 $\varepsilon$  は媒質の誘電率で、 $k = \sqrt{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}}$  とし、

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left( \frac{ck}{\omega} \right)^2 \quad (10)$$

の関係がある。ただし、媒質の透磁率は真空の透磁率に等しいとしている。

境界面  $x = 0$  と  $x = d$  での電磁場に対する境界条件は、電場成分  $E_y, E_z$  と電束密度成分  $D_x$ 、および磁束密度成分  $B_x, B_y, B_z$  のすべてが境界面の両側で等しくなることである。

#### (1) S 偏光の場合

S 偏光では電場が  $z$  方向に振動するので、電場の  $x$  成分と  $y$  成分は  $0$  で、 $z$  成分は、

$$E_{jz}^{(S)} = A_j^{(S)} \exp(i[\omega t - k_{jx}x - k_{jy}y]) \quad (11)$$

$$E'_{jz}{}^{(S)} = A'_j{}^{(S)} \exp(i[\omega t - k'_{jx}x - k'_{jy}y]) \quad (12)$$

$$E_{3z}^{(S)} = A_3^{(S)} \exp(i[\omega t - k_{3x}(x-d) - k_{3y}y]) \quad (13)$$

と表される。これらと式(8)より、各領域での磁束密度の  $x$  成分と  $y$  成分は、

$$B_{jx}^{(S)} = \frac{1}{\omega} k_{jy} E_{jz}^{(S)}, \quad B_{jy}^{(S)} = -\frac{1}{\omega} k_{jx} E_{jz}^{(S)} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (14)$$

$$B'_{jx}{}^{(S)} = \frac{1}{\omega} k'_{jy} E'_{jz}{}^{(S)}, \quad B'_{jy}{}^{(S)} = -\frac{1}{\omega} k'_{jx} E'_{jz}{}^{(S)} \quad (j = 1, 2) \quad (15)$$

となる。 $z$  成分は  $0$  である。

まず、 $x = 0$  での  $E_z^{(S)}$  の連続性より、

$$A_1^{(S)} \exp(-ik_{1y}y) + A_1'^{(S)} \exp(-ik'_{1y}y) = A_2^{(S)} \exp(-ik_{2y}y) + A_2'^{(S)} \exp(-ik'_{2y}y) \quad (16)$$

が成り立つ。これが任意の  $y$  に対して成り立つためには、

$$k_{1y} = k'_{1y} = k_{2y} = k'_{2y} \quad (17)$$

$$A_1^{(S)} + A_1'^{(S)} = A_2^{(S)} + A_2'^{(S)} \quad (18)$$

を満たさなければならない。これらは  $x = 0$  での  $B_x^{(S)}$  の連続性から導くこともできる。

次に、 $x = d$  での  $E_z^{(S)}$  の連続性より、

$$A_2^{(S)} \exp(-ik_{2x}d - ik_{2y}y) + A_2'^{(S)} \exp(-ik_{2x}'d - ik_{2y}'y) = A_3^{(S)} \exp(-ik_{3y}y) \quad (19)$$

が成り立つ。これが任意の  $y$  に対して成り立つためには、

$$k_{2y} = k_{2y}' = k_{3y} \quad (20)$$

$$A_2^{(S)} \exp(-ik_{2x}d) + A_2'^{(S)} \exp(-ik_{2x}'d) = A_3^{(S)} \quad (21)$$

を満たさなければならない。これらは  $x = d$  での  $B_x^{(S)}$  の連続性から導くこともできる。

一方、屈折率  $n$  の定義式

$$n = \frac{ck}{\omega} = \frac{c}{\omega} \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad (22)$$

より、

$$\frac{k_1}{n_1} = \frac{k_1'}{n_1} = \frac{k_2}{n_2} = \frac{k_2'}{n_2} = \frac{k_3}{n_3} \quad (23)$$

が成り立つ。式(17)と(23)、および入射波と反射波は  $x$  軸に沿っては逆向きに伝わることに注意すれば、

$$k_{1x}' = -\sqrt{k_1'^2 - k_{1y}'^2} = -\sqrt{k_1^2 - k_{1y}^2} = -k_{1x} \quad (24)$$

$$k_{2x}' = -\sqrt{k_2'^2 - k_{2y}'^2} = -\sqrt{k_2^2 - k_{2y}^2} = -k_{2x} \quad (25)$$

を得る。ここで、

$$g = \exp(-ik_{2x}d) \quad (26)$$

とおき、式(25)を用いて式(21)を書き換えれば、

$$g A_2^{(S)} + g^{-1} A_2'^{(S)} = A_3^{(S)} \quad (27)$$

となる。

さらに、 $x = 0$  と  $x = d$  での  $B_y^{(S)}$  の連続性より、

$$\begin{aligned} & k_{1x} A_1^{(S)} \exp(-i k_{1y} y) + k_{1x}' A_1'^{(S)} \exp(-i k_{1y}' y) \\ &= k_{2x} A_2^{(S)} \exp(-i k_{2y} y) + k_{2x}' A_2'^{(S)} \exp(-i k_{2y}' y) \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} & k_{2x} A_2^{(S)} \exp(-i k_{2x} d - i k_{2y} y) + k_{2x}' A_2'^{(S)} \exp(-i k_{2x}' d - i k_{2y}' y) \\ &= k_{3x} A_3^{(S)} \exp(-i k_{3y} y) \end{aligned} \quad (29)$$

が成り立つ。式(17)、(20)、(24)、(25)、(26)を用いて式(28)と(29)を書き換えれば、

$$k_{1x} (A_1^{(S)} - A_1'^{(S)}) = k_{2x} (A_2^{(S)} - A_2'^{(S)}) \quad (30)$$

$$k_{2x} (g A_2^{(S)} - g^{-1} A_2'^{(S)}) = k_{3x} A_3^{(S)} \quad (31)$$

となる。

最後に、式(18)、(27)、(30)、(31)を4つの未知数  $A_1'^{(S)}$ 、 $A_2^{(S)}$ 、 $A_2'^{(S)}$ 、 $A_3^{(S)}$  に対する4元1次方程式とみて、これら4つの式から  $A_2^{(S)}$  と  $A_2'^{(S)}$  を消去し、振幅反射率  $r^{(S)} = A_1'^{(S)}/A_1^{(S)}$  と振幅透過率  $t^{(S)} = A_3^{(S)}/A_1^{(S)}$  を求めれば、

$$r^{(S)} = \frac{g^2(k_{2x}-k_{3x})(k_{1x}+k_{2x})+(k_{2x}+k_{3x})(k_{1x}-k_{2x})}{g^2(k_{2x}-k_{3x})(k_{1x}-k_{2x})+(k_{2x}+k_{3x})(k_{1x}+k_{2x})} \quad (32)$$

$$t^{(S)} = \frac{4 g k_{1x} k_{2x}}{g^2(k_{2x}-k_{3x})(k_{1x}-k_{2x})+(k_{2x}+k_{3x})(k_{1x}+k_{2x})} \quad (33)$$

を得る。

## (2) P 偏光の場合

P 偏光では電場が  $x-y$  面内で振動するので、電場の  $z$  成分は 0 である。 $x-y$  面内で図1の矢印の向きの電場成分は、

$$E_j^{(P)} = A_j^{(P)} \exp(i[\omega t - k_{jx}x - k_{jy}y]) \quad (j = 1, 2) \quad (34)$$

$$E_j'^{(P)} = A_j'^{(P)} \exp(i[\omega t - k_{j'x}x - k_{j'y}y]) \quad (j = 1, 2) \quad (35)$$

$$E_3^{(P)} = A_3^{(P)} \exp(i[\omega t - k_{3x}(x-d) - k_{3y}y]) \quad (36)$$

と表される。磁束密度  $\mathbf{B}^{(P)}$  は式⑧から計算できて、各領域で  $x$  成分と  $y$  成分は 0,  $z$  成分は、

$$B_{jz}^{(P)} = \frac{1}{\omega} k_j E_j^{(P)} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (37)$$

$$B_{jz}'^{(P)} = \frac{1}{\omega} k_j' E_j'^{(P)} \quad (j = 1, 2) \quad (38)$$

となる。電束密度  $\mathbf{D}^{(P)}$  は式⑨から計算できて、各領域で  $z$  成分は 0,  $x$  成分と  $y$  成分は、

$$D_{jx}^{(P)} = -\varepsilon_0 \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 k_{jy} k_j E_j^{(P)} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (39)$$

$$D_{jx}'^{(P)} = -\varepsilon_0 \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 k_{j'y} k_j' E_j'^{(P)} \quad (j = 1, 2) \quad (40)$$

$$D_{jy}^{(P)} = \varepsilon_0 \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 k_{jx} k_j E_j^{(P)} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (41)$$

$$D_{jy}'^{(P)} = \varepsilon_0 \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 k_{j'x} k_j' E_j'^{(P)} \quad (j = 1, 2) \quad (42)$$

となる。

まず,  $x = 0$  での  $B_z^{(P)}$  の連続性より、

$$\begin{aligned} & k_1 A_1^{(P)} \exp(-i k_{1y}y) + k_1' A_1'^{(P)} \exp(-i k_{1'y}y) \\ & = k_2 A_2^{(P)} \exp(-i k_{2y}y) + k_2' A_2'^{(P)} \exp(-i k_{2'y}y) \end{aligned} \quad (43)$$

が成り立つ。これが任意の  $y$  に対して成り立つためには、

$$k_{1y} = k_{1'y} = k_{2y} = k_{2'y} \quad (44)$$

$$k_1 A_1^{(P)} + k_1' A_1'^{(P)} = k_2 A_2^{(P)} + k_2' A_2'^{(P)} \quad (45)$$

を満たさなければならない。これらは  $x = 0$  での  $D_x^{(P)}$  の連続性から導くこともできる。式⑩を用いて式④を書き換えれば、

$$k_1 (A_1^{(P)} + A_1'^{(P)}) = k_2 (A_2^{(P)} + A_2'^{(P)}) \quad (46)$$

となる。

次に,  $x = d$  での  $B_z^{(P)}$  の連続性より,

$$\begin{aligned} & k_2 A_2^{(P)} \exp(-i k_{2x} d - i k_{2y} y) + k_2' A_2'^{(P)} \exp(-i k_{2x}' d - i k_{2y}' y) \\ &= k_3 A_3^{(P)} \exp(-i k_{3y} y) \end{aligned} \quad (47)$$

が成り立つ。これが任意の  $y$  に対して成り立つためには,

$$k_{2y} = k_{2y}' = k_{3y} \quad (48)$$

$$k_2 A_2^{(P)} \exp(-i k_{2x} d) + k_2' A_2'^{(P)} \exp(-i k_{2x}' d) = k_3 A_3^{(P)} \quad (49)$$

を満たさなければならない。式(48), (49)を用いて式(47)を書き換えれば,

$$k_2 (g A_2^{(P)} + g^{-1} A_2'^{(P)}) = k_3 A_3^{(P)} \quad (50)$$

となる。これは  $x = d$  での  $D_x^{(P)}$  の連続性から導くこともできる。

さらに,  $x = 0$  と  $x = d$  での  $E_y^{(P)}$  の連続性より,

$$\begin{aligned} & \frac{k_{1x}}{k_1} A_1^{(P)} \exp(-i k_{1y} y) + \frac{k_{1x}'}{k_1'} A_1'^{(P)} \exp(-i k_{1y}' y) \\ &= \frac{k_{2x}}{k_2} A_2^{(P)} \exp(-i k_{2y} y) + \frac{k_{2x}'}{k_2'} A_2'^{(P)} \exp(-i k_{2y}' y) \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} & \frac{k_{2x}}{k_2} A_2^{(P)} \exp(-i k_{2x} d - i k_{2y} y) + \frac{k_{2x}'}{k_2'} A_2'^{(P)} \exp(-i k_{2x}' d - i k_{2y}' y) \\ &= \frac{k_{3x}}{k_3} A_3^{(P)} \exp(-i k_{3y} y) \end{aligned} \quad (52)$$

が成り立つ。式(48), (49), (51), (52)を用いて式(51)と(52)を書き換えれば,

$$\frac{k_{1x}}{k_1} (A_1^{(P)} - A_1'^{(P)}) = \frac{k_{2x}}{k_2} (A_2^{(P)} - A_2'^{(P)}) \quad (53)$$

$$\frac{k_{2x}}{k_2} (g A_2^{(P)} - g^{-1} A_2'^{(P)}) = \frac{k_{3x}}{k_3} A_3^{(P)} \quad (54)$$

となる。

最後に, 式(48), (50), (53), (54)から  $A_2^{(P)}$  と  $A_2'^{(P)}$  を消去して, 振幅反射率  $r^{(P)} = A_1'^{(P)}/A_1^{(P)}$  と振幅透過率  $t^{(P)} = A_3^{(P)}/A_1^{(P)}$  を求めれば,

$$\begin{aligned} r^{(P)} &= \frac{g^2(k_3^2 k_{2x} - k_2^2 k_{3x})(k_2^2 k_{1x} + k_1^2 k_{2x}) + (k_3^2 k_{2x} + k_2^2 k_{3x})(k_2^2 k_{1x} - k_1^2 k_{2x})}{g^2(k_3^2 k_{2x} - k_2^2 k_{3x})(k_2^2 k_{1x} - k_1^2 k_{2x}) + (k_3^2 k_{2x} + k_2^2 k_{3x})(k_2^2 k_{1x} + k_1^2 k_{2x})} \\ &= \frac{g^2(n_3^2 k_{2x} - n_2^2 k_{3x})(n_2^2 k_{1x} + n_1^2 k_{2x}) + (n_3^2 k_{2x} + n_2^2 k_{3x})(n_2^2 k_{1x} - n_1^2 k_{2x})}{g^2(n_3^2 k_{2x} - n_2^2 k_{3x})(n_2^2 k_{1x} - n_1^2 k_{2x}) + (n_3^2 k_{2x} + n_2^2 k_{3x})(n_2^2 k_{1x} + n_1^2 k_{2x})} \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} t^{(P)} &= \frac{4 g k_1 k_2^2 k_3 k_{1x} k_{2x}}{g^2(k_3^2 k_{2x} - k_2^2 k_{3x})(k_2^2 k_{1x} - k_1^2 k_{2x}) + (k_3^2 k_{2x} + k_2^2 k_{3x})(k_2^2 k_{1x} + k_1^2 k_{2x})} \\ &= \frac{4 g n_1 n_2^2 n_3 k_{1x} k_{2x}}{g^2(n_3^2 k_{2x} - n_2^2 k_{3x})(n_2^2 k_{1x} - n_1^2 k_{2x}) + (n_3^2 k_{2x} + n_2^2 k_{3x})(n_2^2 k_{1x} + n_1^2 k_{2x})} \end{aligned} \quad (56)$$

を得る。ただし, 式の変形に際して式(48)を用いた。

(3) エネルギー反射率とエネルギー透過率および位相のずれ  
複素表示の場合、ポインティングベクトルの時間平均値  $\mathbf{P}$  は、

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \frac{1}{4\mu_0} (\mathbf{E}^* \times \mathbf{B} + \mathbf{E} \times \mathbf{B}^*) \\ &= \frac{\varepsilon_0 c^2}{4} \left\{ \mathbf{E}^* \times \left( \frac{\mathbf{k}}{\omega} \times \mathbf{E} \right) + \mathbf{E} \times \left( \frac{\mathbf{k}^*}{\omega} \times \mathbf{E}^* \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 c^2 |\mathbf{E}|^2 \frac{\mathbf{k} + \mathbf{k}^*}{2\omega} \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 c^2 |\mathbf{E}|^2 \frac{\mathbf{k}_R}{\omega} \end{aligned} \quad (57)$$

と表される。ただし、\* は複素共役を表す。

媒質 I と媒質 III の屈折率  $n_1$  と  $n_3$  が実数であれば、波数ベクトル  $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}'_1, \mathbf{k}_3$  は実ベクトルとなるので、入射波と反射波と透過波のポインティングベクトルの時間平均値は、

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c^2 |A_1|^2 \frac{\mathbf{k}_1}{\omega}, \quad \mathbf{P}'_1 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c^2 |A'_1|^2 \frac{\mathbf{k}'_1}{\omega}, \quad \mathbf{P}_3 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c^2 |A_3|^2 \frac{\mathbf{k}_3}{\omega} \quad (58)$$

となる。このとき、 $\mathbf{k}_1$  方向に入射する光波のエネルギー反射率  $R$  とエネルギー透過率  $T$  は、

$$R = \frac{|P'_{1x}|}{P_{1x}} = \frac{|A'_1|^2 |k'_{1x}|}{|A_1|^2 k_{1x}} = |r|^2 \quad (59)$$

$$T = \frac{P_{3x}}{P_{1x}} = \frac{|A_3|^2 k_{3x}}{|A_1|^2 k_{1x}} = |t|^2 \frac{k_{3x}}{k_{1x}} \quad (60)$$

から求めることができる。

一般的には振幅反射率  $r$  と振幅透過率  $t$  は複素数である。それらを極座標を用いて、

$$r = |r| \exp(i\delta_r) \quad (61)$$

$$t = |t| \exp(i\delta_t) \quad (62)$$

と表せば、偏角  $\delta_r$  と  $\delta_t$  はそれぞれ入射波に対する反射波と透過波の位相の進みを表し、

$$\delta_r = \text{Arg}(r) = \text{Arctan}\left(\frac{r_I}{r_R}\right), \quad \delta_t = \text{Arg}(t) = \text{Arctan}\left(\frac{t_I}{t_R}\right) \quad (63)$$

から求めることができる。ただし、添字の I は虚部を表す。また、 $\delta_r$  は点 O での反射波と入射波の位相の差であり、 $\delta_t$  は点 O' での透過波の位相と点 O での入射波の位相の差であることに注意しなければならない。

以上の結果は、

齊藤全弘 : マイケルソン干渉計における光波の干渉, 駿台フォーラム第21号(2003)p.95.  
に与えてあるが, 読者の便宜を考え, 詳しい導出過程を付け加えてここに再録した。

「熱中物理」に掲載されている論文の要約 は [こちらへ](#)