境界面での反射と透過によって光のエネルギーが失われないための条件

斉藤 全弘

図1，2のように，一様で等方的な媒質ⅠとⅡの境界面($x=0$)に平面光波が入射するとき，反射と透過によって光のエネルギーが失われないための条件を求める。2つの媒質の屈折率 n_1と n_2 は一般的には複素数で，それぞれの領域で一定値をとる。S 偏光と P 偏光のいずれの場合でも，複素表示による電場成分は，

入射波 ： $E_1\ (t,x,y)=A_1\exp\left(\mathrm{i}\left[\omega t-k_{1x}x-k_{1y}y\right]\right)$

反射波 ： $E_1{}'(t,x,y)=A_1'\exp\left(\mathrm{i}\left[\omega t-k_{1x}'x-k_{1y}'y\right]\right)$

透過波 ： $E_2\ (t,x,y)=A_2\exp\left(\mathrm{i}\left[\omega t-k_{2x}x-k_{2y}y\right]\right)$

と表される。振幅A_1 ，A_1' ，A_2は複素数の定数である。入射波，反射波，透過波の波数ベクトル $\boldsymbol{k}_1$ ，$\boldsymbol{k}_1'$ ，$\boldsymbol{k}_2$ の実部（添字Rで表す）の向きはそれぞれの波が進行する向きであり，ここではそれらは z 軸に垂直である。また，その虚部（添字Ｉで表す）はそれぞれの波の減衰の度合を表す。

等方性より，入射波はどの方向から境界面に入射してもその位相速度と減衰の仕方は同じであるから，$\boldsymbol{k}_{1\mathrm{R}}$ と $\boldsymbol{k}_{1\mathrm{I}}$ は平行で，$|\boldsymbol{k}_{1\mathrm{R}}|$ と $|\boldsymbol{k}_{1\mathrm{I}}|$ は波の進行方向によらず一定である。

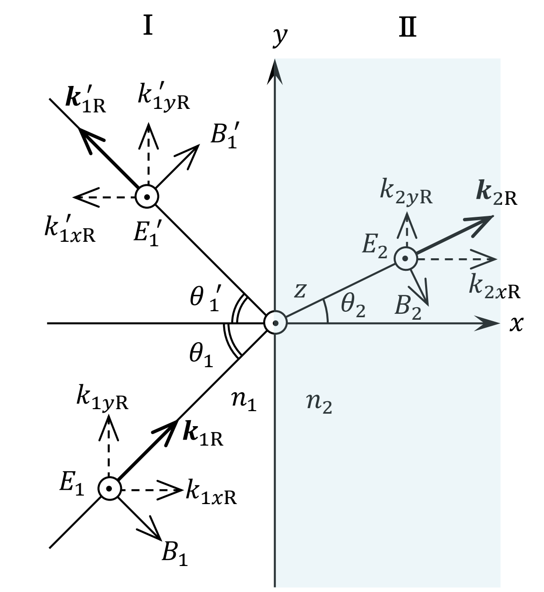

図 1 （ S 偏光 ）

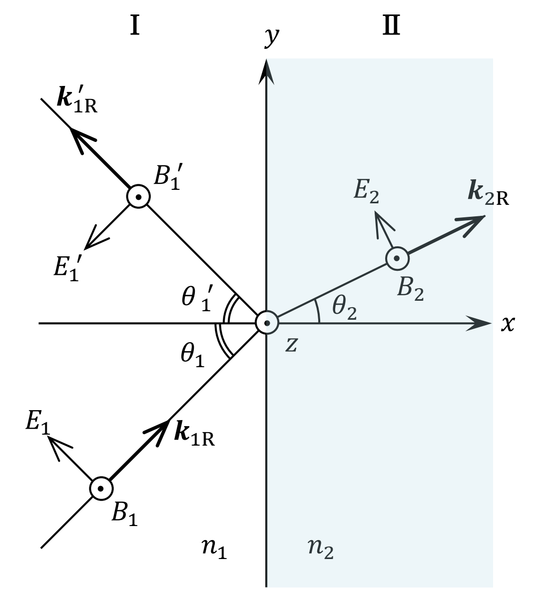

図 2（ P 偏光 ）

（A） S 偏光の場合

論文[5]の⑬，⑭式と㉒，㉓式より，境界面でのエネルギー反射率 R とエネルギー透過率 T は，

$$R=|\,r\,|^2=\frac{k_{1x}-k_{2x}}{k_{1x}+k_{2x}}\ \frac{k_{1x}^*-k_{2x}^*}{k_{1x}^*+k_{2x}^*}$$

$$=\frac{|k_{1x}|^2-k_{1x}k_{2x}^*-k_{1x}^*k_{2x}+|k_{2x}|^2}{|k_{1x}|^2+k_{1x}k_{2x}^*+k_{1x}^*k_{2x}+|k_{2x}|^2} \qquad (1)$$

$$T = |t|^2 \frac{k_{2x\mathrm{R}}}{k_{1x\mathrm{R}}} = \frac{2k_{1x}}{k_{1x}+k_{2x}} \frac{2k_{1x}^*}{k_{1x}^*+k_{2x}^*} \frac{k_{2x}+k_{2x}^*}{k_{1x}+k_{1x}^*}$$

$$= \frac{4|k_{1x}|^2(k_{2x}+k_{2x}^*)}{(|k_{1x}|^2+k_{1x}k_{2x}^*+k_{1x}^*k_{2x}+|k_{2x}|^2)(k_{1x}+k_{1x}^*)} \qquad (2)$$

と表される。添字の x は波数ベクトルの x 成分を表し，$*$ は複素共役を表す。境界面でエネルギーが失われないための条件は

$$R + T = 1 \qquad (3)$$

である。式(1)，(2) を式(3)に代入して，両辺に式(2)の分母を掛ければ，

$$(|k_{1x}|^2 - k_{1x}k_{2x}^* - k_{1x}^*k_{2x} + |k_{2x}|^2)(k_{1x} + k_{1x}^*) + 4|k_{1x}|^2(k_{2x} + k_{2x}^*)$$

$$= (|k_{1x}|^2 + k_{1x}k_{2x}^* + k_{1x}^*k_{2x} + |k_{2x}|^2)(k_{1x} + k_{1x}^*)$$

$$\Leftrightarrow \quad 4|k_{1x}|^2(k_{2x} + k_{2x}^*) = 2k_{1x}^2k_{2x}^* + 2|k_{1x}|^2k_{2x}^* + 2|k_{1x}|^2k_{2x} + 2k_{1x}^{2*}k_{2x}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = k_{1x}^2k_{2x}^* + k_{1x}^{2*}k_{2x} - |k_{1x}|^2(k_{2x} + k_{2x}^*) \qquad (4)$$

となる。ここで，$k_{1x} = k_{1x\mathrm{R}} + \mathrm{i}k_{1x\mathrm{I}}$, $k_{2x} = k_{2x\mathrm{R}} + \mathrm{i}k_{2x\mathrm{I}}$ とおけば，式(4)は，

$$0 = 2\mathrm{R_e}\{(k_{1x\mathrm{R}}^2 + 2\mathrm{i}k_{1x\mathrm{R}}k_{1x\mathrm{I}} - k_{1x\mathrm{I}}^2)(k_{2x\mathrm{R}} - \mathrm{i}k_{2x\mathrm{I}}) - (k_{1x\mathrm{R}}^2 + k_{1x\mathrm{I}}^2)(k_{2x\mathrm{R}} + \mathrm{i}k_{2x\mathrm{I}})\}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = (k_{1x\mathrm{R}}^2 - k_{1x\mathrm{I}}^2)k_{2x\mathrm{R}} + 2k_{1x\mathrm{R}}k_{1x\mathrm{I}}k_{2x\mathrm{I}} - (k_{1x\mathrm{R}}^2 + k_{1x\mathrm{I}}^2)k_{2x\mathrm{R}}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = 2k_{1x\mathrm{I}}(k_{1x\mathrm{R}}k_{2x\mathrm{I}} - k_{1x\mathrm{I}}k_{2x\mathrm{R}})$$

と書き換えられる。よって，条件式(3)が成り立つのは，

$$k_{1x\mathrm{I}} = 0 \qquad (5)$$

または，

$$k_{1x\mathrm{R}}k_{2x\mathrm{I}} - k_{1x\mathrm{I}}k_{2x\mathrm{R}} = 0 \qquad (6)$$

のいずれかの場合である。

(i) $k_{1x\mathrm{I}} = 0$ の場合

上記のように，媒質 I では$\boldsymbol{k}_{1\mathrm{R}} = (k_{1x\mathrm{R}}, k_{1y\mathrm{R}})$ と $\boldsymbol{k}_{1\mathrm{I}} = (k_{1x\mathrm{I}}, k_{1y\mathrm{I}})$ は平行であり，境界面に入射する光の$k_{1x\mathrm{R}}$ は 0 ではないから，

$$k_{1y\mathrm{I}} = \frac{k_{1y\mathrm{R}}}{k_{1x\mathrm{R}}} k_{1x\mathrm{I}} = 0$$

となる。したがって$\boldsymbol{k}_1$ は実ベクトルでなければならない。

逆に，$\boldsymbol{k}_1$ が実ベクトルであれば，k_{2x} が複素数であっても，境界面での反射と透過によってエネルギーが失われることはない。

ここでは $\boldsymbol{k}_{1\mathrm{R}}$ と $\boldsymbol{k}_{1\mathrm{I}}$ が平行であることから $k_{1y\mathrm{I}} = 0$ を導いたが，y軸方向の並進対称性を仮定して，$k_{1y\mathrm{I}} = 0$ としてもよい。

(ii) $k_{1x\mathrm{R}}k_{2x\mathrm{I}} - k_{1x\mathrm{I}}k_{2x\mathrm{R}} = 0$ の場合

この条件式より，

$$\frac{k_{2x\mathrm{R}}}{k_{1x\mathrm{R}}} = \frac{k_{2x\mathrm{I}}}{k_{1x\mathrm{I}}} = \frac{k_{2x\mathrm{R}}+\mathrm{i}k_{2x\mathrm{I}}}{k_{1x\mathrm{R}}+\mathrm{i}k_{1x\mathrm{I}}} = \frac{k_{2x}}{k_{1x}} = a \qquad (7)$$

を得る。ただし，a は正の定数である。上記のように，ここでは $\boldsymbol{k}_{1\mathrm{R}}$ と $\boldsymbol{k}_{1\mathrm{I}}$ が平行である場合を考えているので，

$$\frac{k_{1y\mathrm{R}}}{k_{1x\mathrm{R}}}=\frac{k_{1y\mathrm{I}}}{k_{1x\mathrm{I}}} \tag{8}$$

が成り立つ。さらに，境界面での電磁場に対する境界条件より，

$$k_{1y}=k_{2y} \Leftrightarrow \begin{cases} k_{1y\mathrm{R}}=k_{2y\mathrm{R}} & (9) \\ k_{1y\mathrm{I}}=k_{2y\mathrm{I}} & (10) \end{cases}$$

が成り立つ（論文[5]の⑥式）。これらの関係式より，次の関係式が導かれる。

$$\frac{k_{2y\mathrm{R}}}{k_{2x\mathrm{R}}}=\frac{k_{1y\mathrm{R}}}{k_{1x\mathrm{R}}k_{2x\mathrm{I}}/k_{1x\mathrm{I}}} \qquad (\because\ (9)\text{と}(7))$$

$$=\frac{k_{1x\mathrm{R}}k_{1y\mathrm{I}}/k_{1x\mathrm{I}}}{k_{1x\mathrm{R}}k_{2x\mathrm{I}}/k_{1x\mathrm{I}}} \qquad (\because\ (8))$$

$$=\frac{k_{2y\mathrm{I}}}{k_{2x\mathrm{I}}} \qquad (\because\ (10)) \tag{11}$$

すなわち，$\boldsymbol{k}_{2\mathrm{R}}$ と $\boldsymbol{k}_{2\mathrm{I}}$ は平行である。以上をまとめれば，$\boldsymbol{k}_1$ と$\boldsymbol{k}_2$ が複素ベクトルで，$\boldsymbol{k}_{1\mathrm{R}}$ と $\boldsymbol{k}_{1\mathrm{I}}$ が平行のとき，境界面での反射と透過によってエネルギーが失われないのは，領域 II でも$\boldsymbol{k}_{2\mathrm{R}}$ と $\boldsymbol{k}_{2\mathrm{I}}$ が平行になる場合である。

逆に，式(8)と(11)が成り立つとき，それらの辺々の比をとって式(9)と(10)を用いれば，式(7)を導くことができる。式(7)が成り立てば，

$$r=\frac{k_{1x}-k_{2x}}{k_{1x}+k_{2x}}=\frac{1-a}{1+a}$$

$$t=\frac{2k_{1x}}{k_{1x}+k_{2x}}=\frac{2}{1+a}$$

$$R=|\,r\,|^2=\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^2$$

$$T=|\,t\,|^2\,\frac{k_{2x\mathrm{R}}}{k_{1x\mathrm{R}}}=\left(\frac{2}{1+a}\right)^2 a$$

となり，$R+T=1$ を得る。

最後に，式(7)が成り立つとき，屈折率 n_1 ，n_2 と入射角 θ_1 ，屈折角 θ_2 の間に成り立つ関係式を求めよう。まず，屈折率の定義より，

$$\frac{k_1^2}{n_1^2}=\frac{k_2^2}{n_2^2} \Leftrightarrow \left(k_{2x}^2+k_{2y}^2\right)=\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\left(k_{1x}^2+k_{1y}^2\right) \tag{12}$$

を得る。また，入射角と屈折角の定義および式(8)，(11)より，

$$\tan\theta_1=\frac{k_{1y\mathrm{R}}}{k_{1x\mathrm{R}}}=\frac{k_{1y\mathrm{I}}}{k_{1x\mathrm{I}}}=\frac{k_{1y\mathrm{R}}+\mathrm{i}k_{1y\mathrm{I}}}{k_{1x\mathrm{R}}+\mathrm{i}k_{1x\mathrm{I}}}=\frac{k_{1y}}{k_{1x}} \tag{13}$$

$$\tan\theta_2=\frac{k_{2y\mathrm{R}}}{k_{2x\mathrm{R}}}=\frac{k_{2y\mathrm{I}}}{k_{2x\mathrm{I}}}=\frac{k_{2y\mathrm{R}}+\mathrm{i}k_{2y\mathrm{I}}}{k_{2x\mathrm{R}}+\mathrm{i}k_{2x\mathrm{I}}}=\frac{k_{2y}}{k_{2x}} \tag{14}$$

を得る。式(13) のk_{1y}と式(14) のk_{2y}を式(12) に代入すれば，

$$k_{2x}^2(1+\tan^2\theta_2) = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\ k_{1x}^2(1+\tan^2\theta_1)$$

となり, さらに式(7)を用いれば,

$$\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\ =\ a^2\ \frac{1+\tan^2\theta_2}{1+\tan^2\theta_1} \tag{15}$$

となる。n_1 と n_2 の実部は正であるから,

$$\frac{n_2}{n_1}\ =\ a\ \frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2} \tag{16}$$

である。つぎに, $k_{2x}^2 = k_2^2 - k_{2y}^2$ を式(7), (12), (9), (10)を用いて書き換えれば,

$$a^2k_{1x}^2 = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 k_1^2 - k_{1y}^2\ = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\left(k_{1x}^2 + k_{1y}^2\right) - k_{1y}^2$$

となり, さらに両辺をk_{1x}^2 で割って, 式(13) を用いれば,

$$a^2 = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\ (1+\tan^2\theta_1) - \tan^2\theta_1$$

$$\therefore\ \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\ =\ \frac{a^2+\tan^2\theta_1}{1+\tan^2\theta_1} \tag{17}$$

となる。式(15) と(17) を比べれば,

$$a = \frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} \tag{18}$$

を得る。式(18) を式(16) に代入すれば,

$$\frac{n_2}{n_1}\ =\ \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} \tag{19}$$

となる。これが求める関係式であるが, 通常の屈折の法則と違って, n_1 と n_2 は複素数である。

(B) P 偏光の場合

論文[5]の⑲, ⑳式と㉒, ㉓式より, 境界面でのエネルギー反射率 R とエネルギー透過率 T を求めれば,

$$R =\ |\,r\,|^2$$

$$=\frac{n_2^2\,k_{1x}-n_1^2\,k_{2x}}{n_2^2\,k_{1x}+n_1^2\,k_{2x}}\ \frac{n_2^{2*}\,k_{1x}^*-n_1^{2*}\,k_{2x}^*}{n_2^{2*}\,k_{1x}^*+n_1^{2*}k_{2x}^*}$$

$$=\frac{\left|n_2^2k_{1x}\right|^2-n_2^2\,k_{1x}n_1^{2*}k_{2x}^*-n_1^2\,k_{2x}n_2^{2*}k_{1x}^*+\left|n_1^2k_{2x}\right|^2}{\left|n_2^2k_{1x}\right|^2+n_2^2\,k_{1x}n_1^{2*}k_{2x}^*+n_1^2\,k_{2x}n_2^{2*}k_{1x}^*+\left|n_1^2k_{2x}\right|^2} \tag{20}$$

$$T =\ |\,t\,|^2\ \frac{k_{2x\mathrm{R}}}{k_{1x\mathrm{R}}}$$

$$=\ \frac{2\,n_2\,n_1\,k_{1x}}{n_2^2\,k_{1x}+n_1^2\,k_{2x}}\ \frac{2\,n_2^*\,n_1^*\,k_{1x}^*}{n_2^{2*}\,k_{1x}^*+n_1^{2*}\,k_{2x}^*}\ \frac{k_{2x}+k_{2x}^*}{k_{1x}+k_{1x}^*}$$

$$= \frac{4|n_2\, n_1\, k_{1x}|^2}{\left|n_2^2 k_{1x}\right|^2 + n_2^2\, k_{1x} n_1^{2*} k_{2x}^* + n_1^2\, k_{2x} n_2^{2*} k_{1x}^* + \left|n_1^2 k_{2x}\right|^2}\ \frac{k_{2x}+k_{2x}^*}{k_{1x}+k_{1x}^*} \tag{21}$$

となる。式(20)と(21)をエネルギー保存則の式(3)に代入して，両辺に式(21)の分母を掛ければ，

$$\begin{aligned}
&(|n_2^2 k_{1x}|^2 - n_2^2\, k_{1x} n_1^{2*} k_{2x}^* - n_1^2 k_{2x}\, n_2^{2*} k_{1x}^* + |n_1^2 k_{2x}|^2)(k_{1x} + k_{1x}^*) + 4|n_2\, n_1\, k_{1x}|^2 (k_{2x} + k_{2x}^*) \\
&\qquad = (|n_2^2 k_{1x}|^2 + n_2^2\, k_{1x} n_1^{2*} k_{2x}^* + n_1^2 k_{2x}\, n_2^{2*} k_{1x}^* + |n_1^2 k_{2x}|^2)(k_{1x} + k_{1x}^*) \\
\Leftrightarrow\quad & 4n_2\, n_2^* n_1 n_1^* |k_{1x}|^2 k_{2x} + 4n_2\, n_2^* n_1 n_1^* |k_{1x}|^2 k_{2x}^* \\
&= 2n_2^2\, n_1^{2*} k_{1x}^2 k_{2x}^* + 2n_2^2\, n_1^{2*} |k_{1x}|^2 k_{2x}^* + 2n_1^2\, n_2^{2*} |k_{1x}|^2 k_{2x} + 2n_1^2\, n_2^{2*} k_{1x}^{*2} k_{2x} \\
\Leftrightarrow\quad & 0 = n_2^2\, n_1^{2*} k_{1x}^2 k_{2x}^* + n_2 n_1^* |k_{1x}|^2 k_{2x}^* (n_2 n_1^* - 2n_2^* n_1) \\
&\quad + n_2^{2*} n_1^2 k_{1x}^{2*} k_{2x} + n_2^* n_1 |k_{1x}|^2 k_{2x} (n_2^* n_1 - 2n_2 n_1^*)
\end{aligned} \tag{22}$$

となる。

以下，簡単のために，n_1，k_{1x}，k_{1y} が実数の場合に限定する。このとき，$n_1^* = n_1$，$k_{1x}^* = k_{1x}$であるから，式(22)は，

$$\begin{aligned}
0 &= 2n_2(n_2 - n_2^*)k_{2x}^* + 2n_2^*(n_2^* - n_2)k_{2x} \\
&= 4\, \mathrm{R_e}\{n_2(n_2 - n_2^*)k_{2x}^*\}
\end{aligned} \tag{23}$$

となる。ここで，n_2^2 と $n_2 n_2^*$ を求める。真空での光速を c として，屈折率の定義より，

$$\begin{aligned}
n_2^2 &= \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \left(k_{2x}^2 + k_{2y}^2\right) \\
&= \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \left\{(k_{2x\mathrm{R}} + \mathrm{i}k_{2x\mathrm{I}})^2 + \left(k_{2y\mathrm{R}} + \mathrm{i}k_{2y\mathrm{I}}\right)^2\right\} \\
&= \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \left\{\left(k_{2x\mathrm{R}}^2 - k_{2x\mathrm{I}}^2 + k_{2y\mathrm{R}}^2 - k_{2y\mathrm{I}}^2\right) + 2\mathrm{i}\left(k_{2x\mathrm{R}} k_{2x\mathrm{I}} + k_{2y\mathrm{R}} k_{2y\mathrm{I}}\right)\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(n_2 n_2^*)^2 &= \left(\frac{c}{\omega}\right)^4 \left(k_{2x}^2 + k_{2y}^2\right)\left(k_{2x}^{2*} + k_{2y}^{2*}\right) \\
&= \left(\frac{c}{\omega}\right)^4 \left(|k_{2x}|^4 + \left|k_{2y}\right|^4 + k_{2x}^2 k_{2y}^{2*} + k_{2y}^2 k_{2x}^{2*}\right) \\
&= \left(\frac{c}{\omega}\right)^4 \Big\{(k_{2x\mathrm{R}}^2 + k_{2x\mathrm{I}}^2)^2 + \left(k_{2y\mathrm{R}}^2 + k_{2y\mathrm{I}}^2\right)^2 \\
&\qquad + (k_{2x\mathrm{R}}^2 - k_{2x\mathrm{I}}^2 + 2\mathrm{i}k_{2x\mathrm{R}} k_{2x\mathrm{I}})\left(k_{2y\mathrm{R}}^2 - k_{2y\mathrm{I}}^2 - 2\mathrm{i}k_{2y\mathrm{R}} k_{2y\mathrm{I}}\right) \\
&\qquad + \left(k_{2y\mathrm{R}}^2 - k_{2y\mathrm{I}}^2 + 2\mathrm{i}k_{2y\mathrm{R}} k_{2y\mathrm{I}}\right)(k_{2x\mathrm{R}}^2 - k_{2x\mathrm{I}}^2 - 2\mathrm{i}k_{2x\mathrm{R}} k_{2x\mathrm{I}})\Big\} \\
&= \left(\frac{c}{\omega}\right)^4 \Big\{k_{2x\mathrm{R}}^4 + 2k_{2x\mathrm{R}}^2\, k_{2x\mathrm{I}}^2 + k_{2x\mathrm{I}}^4 + k_{2y\mathrm{R}}^4 + 2k_{2y\mathrm{R}}^2\, k_{2y\mathrm{I}}^2 + k_{2y\mathrm{I}}^4 \\
&\qquad + 2(k_{2x\mathrm{R}}^2 - k_{2x\mathrm{I}}^2)\left(k_{2y\mathrm{R}}^2 - k_{2y\mathrm{I}}^2\right) + 8k_{2x\mathrm{R}} k_{2x\mathrm{I}} k_{2y\mathrm{R}} k_{2y\mathrm{I}}\Big\}
\end{aligned}$$

k_{1y} が実数のとき，式(10) より，$k_{2y\mathrm{I}} = k_{1y\mathrm{I}} = 0$ であるから，

$$n_2^2 = \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \left(k_{2x\mathrm{R}}^2 - k_{2x\mathrm{I}}^2 + k_{2y\mathrm{R}}^2 + 2\mathrm{i}k_{2x\mathrm{R}} k_{2x\mathrm{I}}\right)$$

$$n_2 n_2^* = \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \left(k_{2x\mathrm{R}}^4 + 2k_{2x\mathrm{R}}^2\, k_{2x\mathrm{I}}^2 + k_{2x\mathrm{I}}^4 + k_{2y\mathrm{R}}^4 + 2k_{2x\mathrm{R}}^2\, k_{2y\mathrm{R}}^2 - 2k_{2x\mathrm{I}}^2 k_{2y\mathrm{R}}^2\right)^{1/2}$$

となる。これらを式(23) に代入すれば,

$$0 = 4\left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \ \mathrm{R_e}\Big[\Big\{\left(k_{2x\mathrm{R}}^2 - k_{2x\mathrm{I}}^2 + k_{2y\mathrm{R}}^2 + 2\mathrm{i}k_{2x\mathrm{R}}k_{2x\mathrm{I}}\right)$$

$$-\left(k_{2x\mathrm{R}}^4 + 2k_{2x\mathrm{R}}^2 k_{2x\mathrm{I}}^2 + k_{2x\mathrm{I}}^4 + k_{2y\mathrm{R}}^4 + 2k_{2x\mathrm{R}}^2 k_{2y\mathrm{R}}^2 - 2k_{2x\mathrm{I}}^2 k_{2y\mathrm{R}}^2\right)^{1/2}\Big\}\left(k_{2x\mathrm{R}} - \mathrm{i}k_{2x\mathrm{I}}\right)\Big]$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \quad 0 &= \left(k_{2x\mathrm{R}}^2 - k_{2x\mathrm{I}}^2 + k_{2y\mathrm{R}}^2\right)k_{2x\mathrm{R}} + 2k_{2x\mathrm{R}}k_{2x\mathrm{I}}^2 \\ &\quad -\left(k_{2x\mathrm{R}}^4 + 2k_{2x\mathrm{R}}^2 k_{2x\mathrm{I}}^2 + k_{2x\mathrm{I}}^4 + k_{2y\mathrm{R}}^4 + 2k_{2x\mathrm{R}}^2 k_{2y\mathrm{R}}^2 - 2k_{2x\mathrm{I}}^2 k_{2y\mathrm{R}}^2\right)^{1/2} k_{2x\mathrm{R}} \\ &= k_{2x\mathrm{R}}\Big\{\left(k_{2x\mathrm{R}}^2 + k_{2x\mathrm{I}}^2 + k_{2y\mathrm{R}}^2\right) \\ &\quad -\left(k_{2x\mathrm{R}}^4 + 2k_{2x\mathrm{R}}^2 k_{2x\mathrm{I}}^2 + k_{2x\mathrm{I}}^4 + k_{2y\mathrm{R}}^4 + 2k_{2x\mathrm{R}}^2 k_{2y\mathrm{R}}^2 - 2k_{2x\mathrm{I}}^2 k_{2y\mathrm{R}}^2\right)^{1/2}\Big\}\end{aligned}$$

となる。よって,求める条件は,

$$k_{2x\mathrm{R}} = 0$$

または

$$\begin{aligned}&k_{2x\mathrm{R}}^4 + 2k_{2x\mathrm{R}}^2 k_{2x\mathrm{I}}^2 + k_{2x\mathrm{I}}^4 + k_{2y\mathrm{R}}^4 + 2k_{2x\mathrm{R}}^2 k_{2y\mathrm{R}}^2 - 2k_{2x\mathrm{I}}^2 k_{2y\mathrm{R}}^2 \\ &= \left(k_{2x\mathrm{R}}^2 + k_{2x\mathrm{I}}^2 + k_{2y\mathrm{R}}^2\right)^2 \\ &= k_{2x\mathrm{R}}^4 + k_{2x\mathrm{I}}^4 + k_{2y\mathrm{R}}^4 + 2k_{2x\mathrm{R}}^2 k_{2x\mathrm{I}}^2 + 2k_{2x\mathrm{R}}^2 k_{2y\mathrm{R}}^2 + 2k_{2x\mathrm{I}}^2 k_{2y\mathrm{R}}^2 \\ \Leftrightarrow \quad & k_{2x\mathrm{I}}k_{2y\mathrm{R}} = 0\end{aligned}$$

となる。結局,式(23) が成り立つのは,

$$k_{2x\mathrm{R}} = 0 \ \text{または}\ k_{2x\mathrm{I}} = 0 \ \text{または}\ k_{2y\mathrm{R}} = 0$$

のいずれかの場合である。

まとめれば,P 偏光で,n_1,k_{1x},k_{1y} が実数の場合,境界面での反射と透過によってエネルギーが失われないのは,次のいずれかの場合である。

(i) $k_{2x\mathrm{R}} = 0$

これは領域 II に光が伝播しないこと,すなわち,境界面で光が全反射することを表している。全反射するときエネルギーは失われない。

(ii) $k_{2x\mathrm{I}} = 0$

$k_{2y\mathrm{I}} = k_{1y\mathrm{I}} = 0$ であるから,これは $\boldsymbol{k}_2$ が実ベクトルであること,すなわち,n_2 が実数であることを表している。n_1 と n_2 が実数であれば,光の吸収は起こらない。

(iii) $k_{2y\mathrm{R}} = 0$

$k_{1y\mathrm{R}} = k_{2y\mathrm{R}} = 0$ であるから,これは光が境界面に垂直に入射することを表している。垂直入射の場合,P 偏光と S 偏光の区別はなくなる。S 偏光の場合,$\boldsymbol{k}_1$ ベクトルが実ベクトルであれば,エネルギーが保存されることは(A)の(i)で証明済みである。

「熱中物理」に掲載されている論文の要約 は こちらへ