

誘電体板の反射率と透過率を求める2つの方法の同値性

齊藤 全弘

図1のように、空気中にある厚さ d 、屈折率 n の透明な誘電体板に波長 λ の平面波が入射角 θ_1 で入射する場合を考える。屈折角 θ_2 で屈折したあと、板の内部で多重反射した無数の光が重なって入射側へ出ていく光と反射角 θ_1 で反射した光との合成波の P 点での複素振幅を A_R 、Q 点から透過側へ出ていく合成波の Q 点での複素振幅を A_T とする。入射波の P 点での複素振幅を A_0 とすれば、誘電体板による振幅反射率 $\rho = A_R/A_0$ と振幅透過率 $\tau = A_T/A_0$ は次式で与えられる(文献 1)。

$$\rho = \frac{r(1-e^{-i\alpha})}{1-r^2 e^{-i\alpha}} \quad (1)$$

$$\tau = \frac{(1-r^2)e^{-i\beta}}{1-r^2 e^{-i\alpha}} \quad (2)$$

ただし、 r は誘電体板の表面での振幅反射率で、フレネルの式より、

$$S \text{ 偏光の場合, } r = -\frac{\sin(\theta_1-\theta_2)}{\sin(\theta_1+\theta_2)} \quad (3)$$

$$P \text{ 偏光の場合, } r = \frac{\tan(\theta_1-\theta_2)}{\tan(\theta_1+\theta_2)} \quad (4)$$

である。また、 α は経路 $P' \rightarrow Q' \rightarrow P$ と経路 $P' \rightarrow R$ の光路差による位相差で、 β は屈折波の P 点と Q 点での位相差である。これらは、 $k = 2\pi/\lambda$ として、

$$\alpha = 2kd\sqrt{n^2 - \sin^2\theta_1} \quad (5)$$

$$\beta = kn^2d/\sqrt{n^2 - \sin^2\theta_1} \quad (6)$$

と表される。反射波の P' 点と R 点での位相差あるいは透過波の Q' 点と T 点での位相差を γ とすれば、

$$\gamma = 2\beta - \alpha \quad (7)$$

が成り立つ。

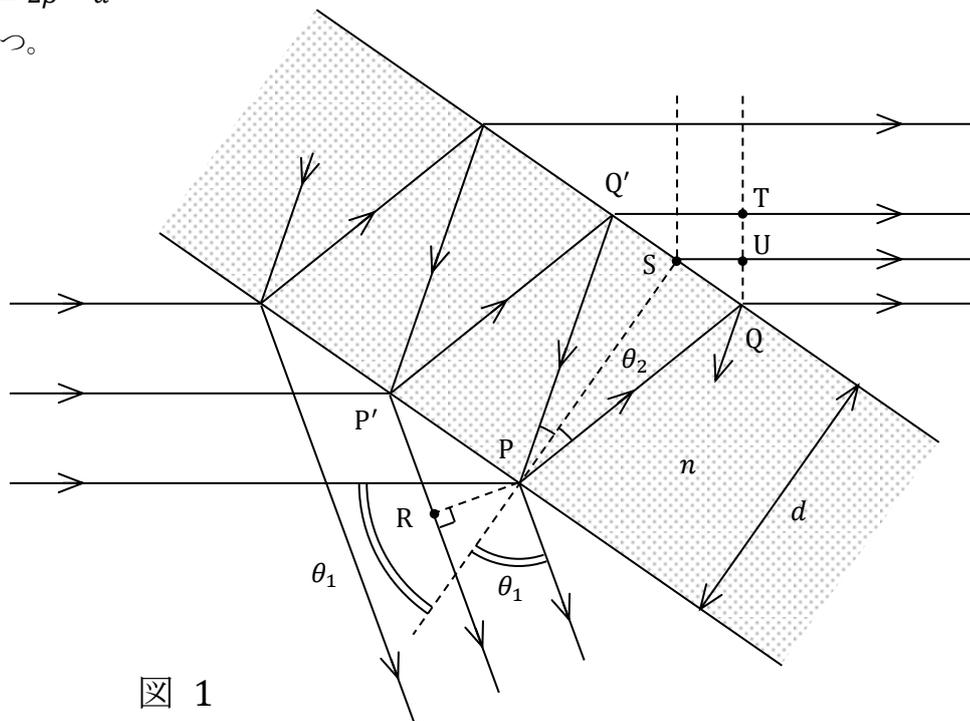


図 1

③または④を①と②に代入すれば,

S 偏光の場合,

$$\rho = - \frac{\sin(\theta_1+\theta_2) \sin(\theta_1-\theta_2)(1-e^{-i\alpha})}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)-\sin^2(\theta_1-\theta_2)e^{-i\alpha}} \quad (8)$$

$$\tau = \frac{\{\sin^2(\theta_1+\theta_2)-\sin^2(\theta_1-\theta_2)\}e^{-i\beta}}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)-\sin^2(\theta_1-\theta_2)e^{-i\alpha}} \quad (9)$$

P 偏光の場合,

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\tan(\theta_1+\theta_2) \tan(\theta_1-\theta_2)(1-e^{-i\alpha})}{\tan^2(\theta_1+\theta_2)-\tan^2(\theta_1-\theta_2)e^{-i\alpha}} \\ &= \frac{\sin(\theta_1+\theta_2) \cos(\theta_1+\theta_2) \sin(\theta_1-\theta_2) \cos(\theta_1-\theta_2)(1-e^{-i\alpha})}{\sin^2(\theta_1+\theta_2) \cos^2(\theta_1-\theta_2)-\sin^2(\theta_1-\theta_2) \cos^2(\theta_1+\theta_2)e^{-i\alpha}} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{\{\tan^2(\theta_1+\theta_2)-\tan^2(\theta_1-\theta_2)\}e^{-i\beta}}{\tan^2(\theta_1+\theta_2)-\tan^2(\theta_1-\theta_2)e^{-i\alpha}} \\ &= \frac{\{\sin^2(\theta_1+\theta_2) \cos^2(\theta_1-\theta_2)-\sin^2(\theta_1-\theta_2) \cos^2(\theta_1+\theta_2)\}e^{-i\beta}}{\sin^2(\theta_1+\theta_2) \cos^2(\theta_1-\theta_2)-\sin^2(\theta_1-\theta_2) \cos^2(\theta_1+\theta_2)e^{-i\alpha}} \end{aligned} \quad (11)$$

を得る。以上の式において、誘電体板の表面における電磁場の境界条件は r (および t, r', t') を求めるときに考慮されている(文献 2)。すなわち、境界条件を満たす無数の波を反射側と透過側で重ね合わせて、 A_R と A_T を求めたのである。

誘電体板による反射率と透過率を導き出すもう一つの方法では、まず反射側と透過側および板の中にある無数の波を重ね合わせておき、その合成波に対して境界条件を適用するのである。ガラス板の表面に蒸着された複素屈折率 $n_2 = n_R - in_i$ の金属層による振幅反射率と振幅透過率がこのような方法で計算されている(文献 3, 4, 5)。そのときに用いた公式は文献 3 の(1)式~(5)式に与えられている。これらの式に,

$$k_{3x} = k_{1x}, \quad n_3 = n_1 = 1, \quad n_2 = n, \quad d_2 = d$$

を代入すれば、空気中にある上記の誘電体板による振幅反射率 r_0 と振幅透過率 t_0 を求めることができ、

S 偏光の場合,

$$r_0 = \frac{-g^2(k_{1x}^2-k_{2x}^2) + (k_{1x}^2-k_{2x}^2)}{-g^2(k_{1x}-k_{2x})^2 + (k_{1x}+k_{2x})^2} \quad (12)$$

$$t_0 = \frac{4gk_{1x}k_{2x}}{-g^2(k_{1x}-k_{2x})^2 + (k_{1x}+k_{2x})^2} \quad (13)$$

P 偏光の場合,

$$r_0 = \frac{-g^2(n^4k_{1x}^2-k_{2x}^2) + (n^4k_{1x}^2-k_{2x}^2)}{-g^2(n^2k_{1x}-k_{2x})^2 + (n^2k_{1x}+k_{2x})^2} \quad (14)$$

$$t_0 = \frac{4gn^2k_{1x}k_{2x}}{-g^2(n^2k_{1x}-k_{2x})^2 + (n^2k_{1x}+k_{2x})^2} \quad (15)$$

となる。ただし、

$$g = \exp(-i k_{2x} d) \quad (16)$$

$$k_{1x} = k_1 \cos \theta_1 \quad (17)$$

$$k_{2x} = k_1 \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1} \quad (18)$$

$$k_1 = 2\pi/\lambda \quad (19)$$

である。まず, (16), (18), (19)と(5)より,

$$g^2 = \exp\left(-i \frac{4\pi}{\lambda} d \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1}\right) = e^{-i\alpha} \quad (20)$$

であることがわかる。つぎに, 屈折の法則より,

$$n = \sin \theta_1 / \sin \theta_2 \quad (21)$$

であるから,

$$\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1} = \frac{\sin \theta_1 \cos \theta_2}{\sin \theta_2}$$

$$k_{1x} \pm k_{2x} = \pm k_1 \frac{\sin(\theta_1 \pm \theta_2)}{\sin \theta_2} \quad (\text{複号同順})$$

$$n^2 k_{1x} \pm k_{2x} = k_1 \frac{\sin \theta_1 (\sin \theta_1 \cos \theta_1 \pm \sin \theta_2 \cos \theta_2)}{\sin^2 \theta_2} \quad (\text{複号同順})$$

となる。これらを(12)~(15)に代入すれば,

S 偏光の場合,

$$r_0 = -\frac{\{\sin(\theta_1 + \theta_2) \sin(\theta_1 - \theta_2)\}(1 - e^{-i\alpha})}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2) - \sin^2(\theta_1 - \theta_2)e^{-i\alpha}} \quad (22)$$

$$t_0 = \frac{4 \sin \theta_1 \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_2}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2) - \sin^2(\theta_1 - \theta_2)e^{-i\alpha}} e^{-i\frac{\alpha}{2}} \quad (23)$$

P 偏光の場合,

$$r_0 = \frac{(\sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_1 - \sin^2 \theta_2 \cos^2 \theta_2)(1 - e^{-i\alpha})}{(\sin \theta_1 \cos \theta_1 + \sin \theta_2 \cos \theta_2)^2 - (\sin \theta_1 \cos \theta_1 - \sin \theta_2 \cos \theta_2)^2 e^{-i\alpha}} \quad (24)$$

$$t_0 = \frac{4 \sin \theta_1 \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_2}{(\sin \theta_1 \cos \theta_1 + \sin \theta_2 \cos \theta_2)^2 - (\sin \theta_1 \cos \theta_1 - \sin \theta_2 \cos \theta_2)^2 e^{-i\alpha}} e^{-i\frac{\alpha}{2}} \quad (25)$$

となる。さらに, 恒等式

$$\sin^2(\theta_1 + \theta_2) - \sin^2(\theta_1 - \theta_2) = 4 \sin \theta_1 \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_2$$

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) = \sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_1 - \sin^2 \theta_2 \cos^2 \theta_2$$

$$\sin(\theta_1 \pm \theta_2) \cos(\theta_1 \mp \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_1 \pm \sin \theta_2 \cos \theta_2 \quad (\text{複号同順})$$

$$\sin^2(\theta_1 + \theta_2) \cos^2(\theta_1 - \theta_2) - \sin^2(\theta_1 - \theta_2) \cos^2(\theta_1 + \theta_2)$$

$$= 4 \sin \theta_1 \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_2$$

を用いれば, (8)~(11)と(22)~(25)より, S偏光とP偏光のいずれの場合でも,

$$\rho = r_0 \quad (26)$$

$$\tau = t_0 e^{-i(\beta - \frac{\alpha}{2})} = t_0 e^{-i\frac{\gamma}{2}} \quad (\because (7)) \quad (27)$$

が成り立つことがわかる。したがって、

$$\text{エネルギー反射率 } R = |\rho|^2 = |r_0|^2 \quad (28)$$

$$\text{と エネルギー透過率 } T = |\tau|^2 = |t_0|^2 \quad (29)$$

は、どちらの方法で計算しても同じである。エネルギー保存則 $R + T = 1$ が成り立つことは、(22)と(23)または(24)と(25)を(28)と(29)に代入することによって確かめることができる。

τ と t_0 の位相に $\gamma/2$ の差があるのは、2つの計算で透過波の位相の基点が異なるからである。 τ の定義は、

$$\tau = \frac{\text{透過波の Q 点における複素振幅 } A_T}{\text{入射波の P 点における複素振幅 } A_0}$$

で、 t_0 の定義は、

$$t_0 = \frac{\text{透過波の S 点における複素振幅 } A_S}{\text{入射波の P 点における複素振幅 } A_0}$$

である。図1において、S 点を通る透過波の位相と Q 点を通る透過波の位相の差は、

$$2\pi \frac{SU}{\lambda} = \frac{1}{2} 2\pi \frac{Q'T}{\lambda} = \frac{1}{2} \gamma$$

となるので、(27)に因子 $e^{-i\frac{\gamma}{2}}$ が現れるのである。

透過波の位相の基点はQ点にとるのが一見合理的にみえるが、一概にそうとも言えない。たとえば、複素屈折率 $n_2 = -in_i$ の金属層の場合、入射した光波は全反射を起こし、金属層へは屈折しない。しかし、金属層の厚さが波長に比べて十分に小さいときには、光波は屈折することなく金属層を透過する。この現象は光子のトンネル効果によると解釈すればわかりやすい。このとき透過光の位相の基点はS点にとるのがよいと筆者は考える。S点以外の点を採用する積極的な理由がないからである。

半透鏡での平面光波の反射や透過による位相のずれが問題となるとき、反射波や透過波のどの波面と入射波のどの波面を比較するのかあいまいなままになっているように思う。反射の場合には図1のP点での入射波と反射波の位相差を反射による位相のずれとするのが合理的にみえるが、Goos-Hänchen 効果を考慮しなければならないときにはそうとも言えない。筆者の一連の論文で金属の蒸着層を扱う場合には、位相の基点を反射波ではP点、透過波ではS点にとっている。

文献

- (1) 斉藤全弘 : マッハ・ツェンダー干渉計での干渉条件(1)
- (2) 斉藤全弘 : 光の反射と透過に伴う位相のずれ(1)
- (3) 斉藤全弘 : マッハ・ツェンダー干渉計での干渉条件(2)
- (4) 斉藤全弘 : マイケルソン干渉計での干渉条件(1)
- (5) 斉藤全弘 : マイケルソン干渉計での干渉条件(2)

「熱中物理」に掲載されている論文の要約

は [こちらへ](#)