光の吸収がある場合の屈折の法則

斉藤　全弘

図１のように，媒質 I（屈折率 n_1）と媒質 II（屈折率 n_2）の境界面に入射角 θ_1 で入射した平面光波が屈折角 θ_2 で屈折する場合を考える。簡単のために，n_1 が実数で，n_2 が複素数 $n_\mathrm{R}-\mathrm{i}n_\mathrm{i}$ であるとする。このとき媒質 I での波数ベクトル $\boldsymbol{k}_1$ は実ベクトルで，媒質 II での波数ベクトル $\boldsymbol{k}_2$ は複素ベクトルである。図１のように，直交座標軸 (x,y,z) を設定し，波数ベクトルの成分を

$$\boldsymbol{k}_1=\left(k_{1x}\,,k_{1y}\right)$$

$$\boldsymbol{k}_2=\left(k_{2x}\,,k_{2y}\right)=\left(k_{2x\mathrm{R}}-\mathrm{i}\,k_{2x\mathrm{i}}\,,\;k_{2y\mathrm{R}}-\mathrm{i}\,k_{2y\mathrm{i}}\right)$$

とする。平面光波の進行方向は波数ベクトルの実部の向きであるから，

$$\tan\theta_1=\frac{k_{1y}}{k_{1x}}\quad,\quad\tan\theta_2=\frac{k_{2y\mathrm{R}}}{k_{2x\mathrm{R}}} \qquad ①$$

が成り立つ。これらの式から，$\tan\theta_2$ を θ_1，n_1，n_R，n_i で表す式を求める。

まず，屈折率の定義より，

$$n_j^2=\frac{c^2}{\omega^2}\,k_j^2\quad(\,j=1\,,2\,)$$

が成り立つ。ここに，c は真空での光速，ω は光波の角振動数で，$k_j^2=\boldsymbol{k}_j\cdot\boldsymbol{k}_j$ である。これより，

$$\frac{k_2^{\,2}}{n_2^{\,2}}=\frac{k_1^{\,2}}{n_1^{\,2}} \qquad ②$$

を得る。つぎに，電磁場に対する $x=0$ での境界条件より，

$$k_{2y}=k_{1y}=k_1\sin\theta_1 \qquad ③$$

を得る（文献 1）。よって，$k_{2y\mathrm{i}}=0$ である。②と③を用いれば，

$$k_{2x}=\sqrt{k_2^{\,2}-k_{2y}^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}k_1\right)^2-\left(k_1\sin\theta_1\right)^2}=k_1\sqrt{\left(\frac{n_\mathrm{R}-\mathrm{i}\,n_\mathrm{i}}{n_1}\right)^2-\sin^2\theta_1} \qquad ④$$

となる。④の左辺を $k_{2x\mathrm{R}}-\mathrm{i}\,k_{2x\mathrm{i}}$ で置き換え，両辺を n_1 倍してから 2 乗すれば，

$$n_1^{\,2}\{k_{2x\mathrm{R}}^2-k_{2x\mathrm{i}}^2-2\mathrm{i}k_{2x\mathrm{R}}\,k_{2x\mathrm{i}}\}=k_1^{\,2}\left\{\left(n_\mathrm{R}^2-n_\mathrm{i}^{\,2}-2\mathrm{i}n_\mathrm{R}\,n_\mathrm{i}\right)-\left(n_1\sin\theta_1\right)^2\right\}$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{matrix}(n_1k_{2x\mathrm{R}})^2-(n_1k_{2x\mathrm{i}})^2=k_1^{\,2}\left(n_\mathrm{R}^2-n_\mathrm{i}^{\,2}\right)-k_1^{\,2}(n_1\sin\theta_1)^2\\ n_1^{\,2}k_{2x\mathrm{R}}k_{2x\mathrm{i}}=k_1^{\,2}n_\mathrm{R}\,n_\mathrm{i}\end{matrix}\right\} \qquad ⑤$$

を得る。⑤より $k_{2x\mathrm{i}}$ を消去して，整理すれば，

$$(n_1k_{2x\mathrm{R}})^4-k_1^{\,2}\{n_\mathrm{R}^2-n_\mathrm{i}^{\,2}-(n_1\sin\theta_1)^2\}(n_1k_{2x\mathrm{R}})^2-(k_1^{\,2}n_\mathrm{R}\,n_\mathrm{i})^2=0$$

となる。これを $(n_1k_{2x\mathrm{R}})^2$ について解けば，

$$(n_1k_{2x\mathrm{R}})^2=\frac{k_1^{\,2}}{2}\left[\;\{n_\mathrm{R}^2-n_\mathrm{i}^{\,2}-(n_1\sin\theta_1)^2\}\pm\sqrt{(n_\mathrm{R}^2+n_\mathrm{i}^{\,2})^2-2(n_\mathrm{R}^2-n_\mathrm{i}^{\,2})(n_1\sin\theta_1)^2+(n_1\sin\theta_1)^4}\;\right] \qquad ⑥$$

となる。$\theta_1=0$ のとき右辺が正となるためには，複号は $+$ でなければならない。③と⑥を用い

て①の右辺を書き換えれば,

$$\tan\theta_2 = \frac{k_{2y\mathrm{R}}}{k_{2x\mathrm{R}}} = \frac{k_1 \sin\theta_1}{k_{2x\mathrm{R}}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}n_1 \sin\theta_1}{\sqrt{\{n_\mathrm{R}^2 - (n_1 \sin\theta_1)^2 - {n_\mathrm{i}}^2\} + \sqrt{\{(n_\mathrm{R} + n_1 \sin\theta_1)^2 + {n_\mathrm{i}}^2\}\{(n_\mathrm{R} - n_1 \sin\theta_1)^2 + {n_\mathrm{i}}^2\}}}} \qquad ⑦$$

となる。これが光の吸収がある場合の屈折の法則である。

$n_\mathrm{i} = 0$すなわち光の吸収がない場合，⑦は

$$\frac{\sin\theta_2}{\sqrt{1 - \sin^2\theta_2}} = \frac{n_1 \sin\theta_1}{\sqrt{n_\mathrm{R}^2 - (n_1 \sin\theta_1)^2}}$$

$$\Longrightarrow\ n_1 \sin\theta_1 = n_\mathrm{R} \sin\theta_2$$

となり，衆知の屈折の法則に帰着する。

具体例で数値計算をしてみよう。まず, $n_1 = 1.0$，$n_\mathrm{R} = 1.5$として, $n_\mathrm{i} = 0, 0.1, 0.5, 1.0, 2.5, 5.5$の場合について，$\theta_2$と$\theta_1$の関係をグラフで表すと図２のようになる。たとえば光学ガラス（$n_\mathrm{R} \sim 1.5$）では，消衰係数n_iは0.1 に比べて充分小さいので，$n_\mathrm{i} = 0$ の曲線からのずれはほとんど見分けられないことがわかる。n_i が 1.0 を越えると見分けられるが，その場合には媒質 II の吸収係数$\alpha = 4\pi n_\mathrm{i}/\lambda$ が大きく，波長λ程度の距離を進めば屈折光は見えなくなってしまう。したがって，実験によって⑦を検証することは，不可能ではないにしても，かなりの困難を伴う。

つぎに, $n_1 = 1.0$，$n_\mathrm{i} = 5.5$ として，$n_\mathrm{R} = 1.5, 1.0, 0.5, 0.1, 0.01, 0.001$の場合について，$\theta_2$と$\theta_1$の関係をグラフで表すと図３のようになる。たとえば銀の場合,

$$\lambda = 770\mathrm{nm}\ \ \text{のとき}\ \ n_2 \sim 0.031 - 5.5\mathrm{i} \quad (\text{理論値})$$

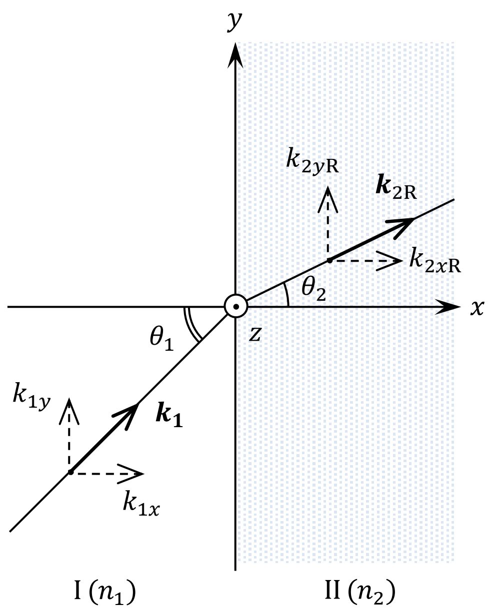
であるから（文献 2），入射角θ_1が 0 から少し大きくなると$\theta_2 \sim \pi/2$となり，全反射に近くなる。消衰係数n_iが大きいので吸収係数 αも大きい。しかし，半透鏡の蒸着層のように銀の厚さが波長の数%のときには，屈折光はわずかに吸収されるだけで，大部分は蒸着層を透過してしまう。そうであるからこそ半透鏡となりうるのである。

参考文献

(1)　斉藤全弘 ： 光の反射と透過に伴う位相のずれ (1)

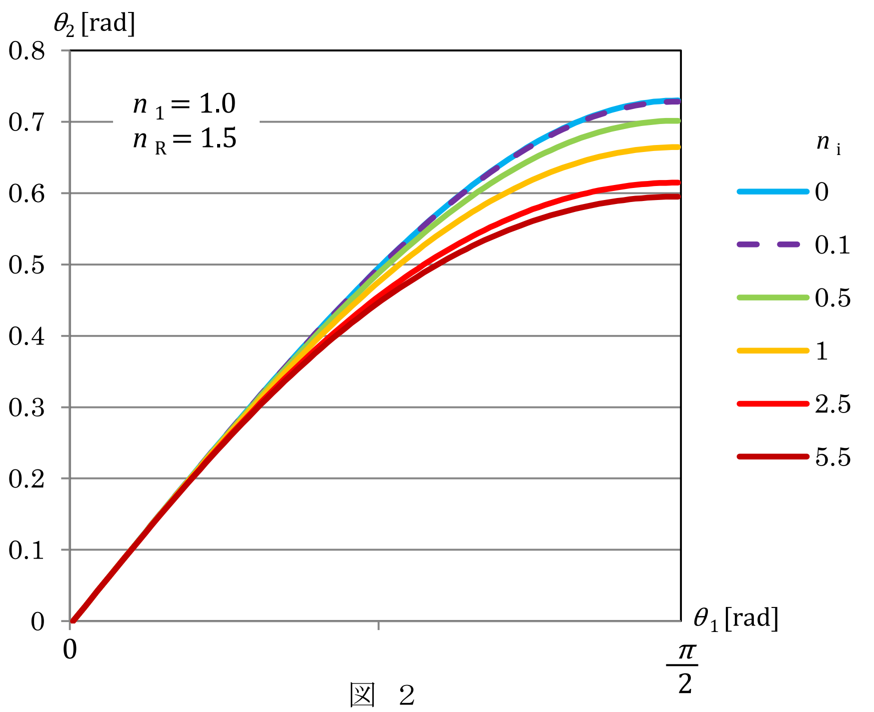
(2)　斉藤全弘 ： マイケルソン干渉計での干渉条件 (2)

「熱中物理」に掲載されている論文の要約　は　こちらへ



y
k2yR
k2R
k2xR
θ2
x
θ1
z
k1y
k1
k1x
I (n1)
II (n2)

図　1



θ2 [rad]
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
n1 = 1.0
nR = 1.5
ni
0
0.1
0.5
1
2.5
5.5
θ1 [rad]
0
π/2

図　2

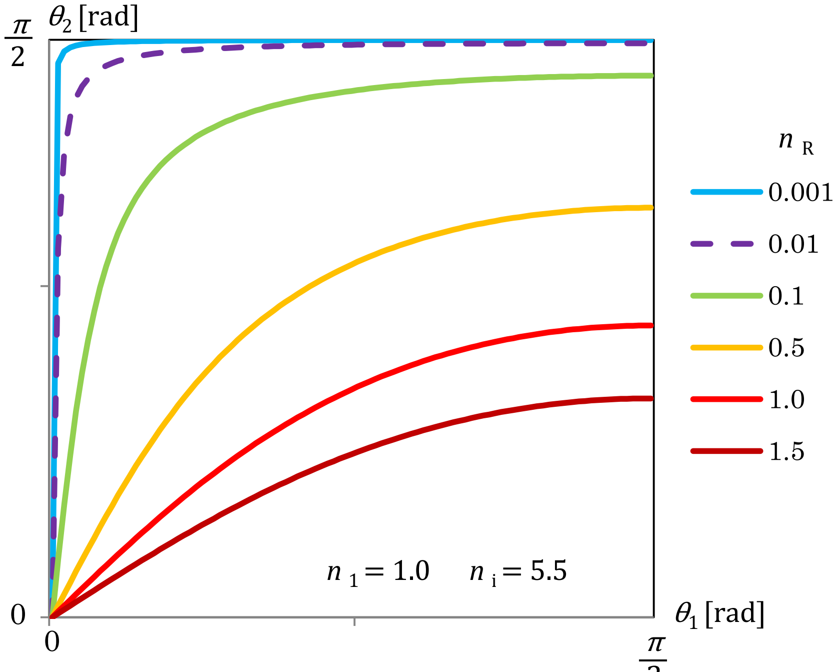


図 3