

§ 1. はじめに

半透鏡を用いた干渉計の検出器での干渉条件を数式で表すとき、半透鏡の金属層での反射と透過による位相のずれの値が必要となる。空気側から金属層に平面波が入射する場合、反射によって位相が π だけずれ、透過するときにはずれないことが多い。ガラス側から金属層に入射する場合も同じ位相変化を伴うとすると、エネルギーが保存されないという矛盾が生じる¹⁾。この矛盾を回避するためであろうか、ガラス側から金属層に入射する場合には、反射や透過によって位相がずれないとする人がある^{2) 3)}。しかし、その理論的根拠は明示されていない。本稿では、金属層での反射によって位相が π だけずれ(あるいは位相がずれず)、かつ透過のときに位相がずれないような半透鏡は存在しないことを、具体例に対する数値計算によって示す。

§ 2. 金属層での反射率と透過率

図1のIは空気、IIは厚さ w の金属層、IIIはガラス板である。それぞれの屈折率を n_1, n_2, n_3 とする。IとIIの境界面に入射角 θ_1 で入射した波長 λ の平面波の一部は反射角 θ_1 で反射し、残りは屈折角 θ_2 で屈折する。その屈折波は金属層の2つの境界面で多重反射をしながらIとIIIへ出て行く。このような無数の平面波が重なって、合成反射波(反射角 θ_1)と合成透過波(透過角 θ_3)が形成される。IIの中では θ_2 方向と $\pi - \theta_2$ 方向に伝わる2つの合成平面波が重なっている。

図1のように座標軸 (x, y, z) を設定し、太い矢印の向きに伝わる入射波と各合成波の波数ベクトルを $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}'_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}'_2, \mathbf{k}_3$ とする。 \mathbf{k}_2 と \mathbf{k}'_2 は複素ベクトルで、その実部が波の進行方向を表す。

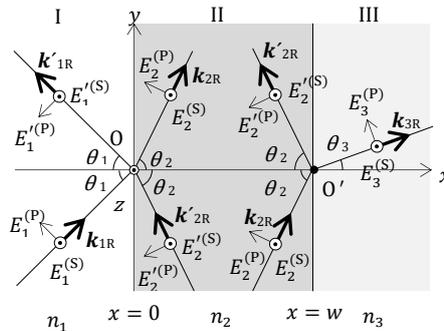


図 1 金属層の断面図

Iは空気、IIは金属層、IIIはガラス。太い矢印の向きにS偏光 ($E_j^{(S)}$)とP偏光 ($E_j^{(P)}$)の平面波が進行する。

電場が z 方向に振動するS偏光と電場が xy 面内で振動するP偏光のいずれの場合でも、各領域内における複素表示による電場は、角振動数を ω , $j = 1, 2$ として、

境界面に対して右上方向に入射する波:

$$E_j = A_j \exp(i[\omega t - k_{jx}x - k_{jy}y])$$

境界面に対して左上方向に反射する波:

$$E'_j = A'_j \exp(i[\omega t - k'_{jx}x - k'_{jy}y])$$

透過波:

$$E_3 = A_3 \exp(i[\omega t - k_{3x}(x-w) - k_{3y}y])$$

と表すことができる。振幅 A_j, A'_j, A_3 は複素数で、その偏角が原点 O (透過波の場合は点 O') での初期位相を表す。境界面 $x=0$ と $x=w$ での電磁場に対する境界条件を表す4つの式から A_2 と A'_2 を消去し、金属層による振幅反射率 $r = A'_1/A_1$ と振幅透過率 $t = A_3/A_1$ を求めれば、S 偏光の場合

$$r = \frac{g^2(k_{2x}-k_{3x})(k_{1x}+k_{2x})+(k_{2x}+k_{3x})(k_{1x}-k_{2x})}{g^2(k_{2x}-k_{3x})(k_{1x}-k_{2x})+(k_{2x}+k_{3x})(k_{1x}+k_{2x})} \quad (1)$$

$$t = \frac{4gk_{1x}k_{2x}}{g^2(k_{2x}-k_{3x})(k_{1x}-k_{2x})+(k_{2x}+k_{3x})(k_{1x}+k_{2x})} \quad (2)$$

P 偏光の場合

$$r = \frac{g^2(n_3^2k_{2x}-n_2^2k_{3x})(n_2^2k_{1x}+n_1^2k_{2x})+(n_3^2k_{2x}+n_2^2k_{3x})(n_2^2k_{1x}-n_1^2k_{2x})}{g^2(n_3^2k_{2x}-n_2^2k_{3x})(n_2^2k_{1x}-n_1^2k_{2x})+(n_3^2k_{2x}+n_2^2k_{3x})(n_2^2k_{1x}+n_1^2k_{2x})} \quad (3)$$

$$t = \frac{4gn_1n_2n_3k_{1x}k_{2x}}{g^2(n_3^2k_{2x}-n_2^2k_{3x})(n_2^2k_{1x}-n_1^2k_{2x})+(n_3^2k_{2x}+n_2^2k_{3x})(n_2^2k_{1x}+n_1^2k_{2x})} \quad (4)$$

となる⁴⁾⁵⁾。ただし、

$$g = \exp(-ik_{2x}w) \quad (5)$$

で、波数ベクトルの x 成分は、 $k_1 = |\mathbf{k}_1| = 2\pi/\lambda$ として、

$$k_{1x} = -k'_{1x} = k_1 \cos \theta_1 \quad (6)$$

$$k_{2x} = -k'_{2x} = k_1 \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2 \theta_1} \quad (7)$$

$$k_{3x} = k_1 \sqrt{\left(\frac{n_3}{n_1}\right)^2 - \sin^2 \theta_1} \quad (8)$$

と表される。 y 成分はすべて $k_{1y} = k_1 \sin \theta_1$ に等しいことが境界条件から導かれる。また、屈折率 n_j 、角度 θ_j と波数ベクトル \mathbf{k}_j の間には、

$$\frac{n_1^2}{k_1^2} = \frac{n_2^2}{k_2^2} = \frac{n_3^2}{k_3^2} \quad (k_j^2 = \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{k}_j = k_{jx}^2 + k_{jy}^2) \quad (9)$$

$$\tan \theta_j = \frac{k_{jyR}}{k_{jxR}} \quad (10)$$

の関係がある。エネルギー反射率 R とエネルギー透過率 T 、および入射波に対する合成反射波と合成透過波の位相のずれ δ_r, δ_t は、

$$R = |r|^2 \quad (11)$$

$$T = |t|^2 \frac{k_{3x}}{k_{1x}} \quad (12)$$

$$\delta_r = \text{Arg}(r) = \text{Arc tan} \left(\frac{r_I}{r_R} \right) \quad (13)$$

$$\delta_t = \text{Arg}(t) = \text{Arc tan} \left(\frac{t_I}{t_R} \right) \quad (14)$$

から求めることができる。添字の R と I は複素数の実部と虚部を表す。ただし、 δ_r は合成反射波と入射波の点 O での位相の差であり、 δ_t は合成透過波の点 O' での位相と入射波の点 O での位相の差であることに注意しなければならない。本稿では k_{1x} と k_{3x} が実数であることを仮定しているの、⑫と⑭は (n_1, k_{1x}) と (n_3, k_{3x}) の交換に対して対称である。よって、光を逆行させても T と δ_t の値は変わらない。

§ 3. 金属の複素屈折率

角振動数 ω の光波に対する金属の複素屈折率は,

$$n_2 = \left\{ 1 + \frac{\sigma/\epsilon_0}{i\omega(1+i\omega\tau)} \right\}^{1/2} \quad (15)$$

$$\sigma = \frac{1}{\rho}, \quad \tau = \frac{m\sigma}{Nq_e^2} \quad (16)$$

で与えられる⁶⁾。ただし、 ϵ_0 は真空の誘電率、 σ は金属の伝導度、 ρ は抵抗率、 τ は自由電子の平均自由時間、 m と q_e は電子の質量と電気量、 N は自由電子の個数密度である。1個の金属原子が f 個の自由電子を供給しているとする、金属の密度を d 、単位物質質量あたりの質量を μ 、アボガドロ定数を N_A として、 N は、

$$N = f N_A \frac{d}{\mu} \quad (17)$$

と表される。一例として、銀の複素屈折率を計算してみよう。この場合、

$$\begin{aligned} d &= 10.5 \text{ g cm}^{-3} \\ \rho &= 1.62 \times 10^{-8} \Omega \text{ m} \\ \mu &= 108 \text{ g mol}^{-1} \end{aligned}$$

である。これらを (15), (16), (17) に代入すると、波長 λ nm の光波に対する複素屈折率は、

$$n_2 = \left\{ 1 - \frac{3.70 \lambda^2}{7.07 \times 10^4 f^{-1} - i \lambda} \right\}^{1/2} \quad (18)$$

となる。ここで、 $f = 1$ として数値計算をすれば、

$$\begin{aligned} \lambda = 380 \text{ のとき } n_2 &= 0.00793 - 2.56 i \\ \lambda = 770 \text{ のとき } n_2 &= 0.0308 - 5.48 i \end{aligned}$$

となる。アルミニウムで計算しても同様の結果を得る⁷⁾。このように、光をよく反射する金属の場合、可視領域での複素屈折率 $n_2 = n - i\kappa$ の理論値は、

$$\kappa = 2.5 \sim 5.5, \quad n \lesssim 10^{-2} \kappa$$

を満たす。 κ を消衰係数と言い、 n を単に屈折率と言うことがある。

§ 4. 光の吸収がない金属層の場合

最初、簡単のために $n = 0$ として、 $n_2 = -i\kappa$ と表せる場合を考察する。この場合、金属層の厚さ w が $w \gg \lambda$ を満たせば、入射波は金属層の表面で全反射する。しかし、 $w \ll \lambda$ であれば、トンネル効果によって光子が金属層を透過する。その結果、光のエネルギーが吸収されることなく、入射光のエネルギーの半分が透過し、残りの半分が反射することが可能となる。このときの $\delta_r, \delta_t, w/\lambda$ の値を求めよう。

具体例として、 $n_1 = 1, n_3 = 1.5, \theta_1 = 45^\circ$ を採用する。このとき、(6), (7), (8) より、

$$\begin{aligned} k_{1x} &= \frac{k_1}{\sqrt{2}} \\ k_{2x} &= -i k_1 \sqrt{\kappa^2 + 0.5} \\ k_{3x} &= k_1 \sqrt{1.5^2 - 0.5} \end{aligned}$$

となる。これらを(1)と(2)、または(3)と(4)に代入して r と t を求め、さらにそれらを(11)と(12)に代入すれば、 R と T が g と κ の関数として求まる。

数値計算は次の手順で行った。まず κ に正の数値を与える。次に、 g の値を $0 < g < 1$ の範囲で変化させて、半透鏡の条件式 $R = T = 0.5$ を満たす g の値 g_0 を探す。 g_0 が求めれば、(5)より導かれる式

$$\frac{w}{\lambda} = - \frac{\log g_0}{2\pi\sqrt{\kappa^2 + 0.5}}$$

によって w/λ の値が求まる。さらに、 g_0 がわかれば、 r と t の複素数値が確定するので、(13)

と⑭より位相のずれ δ_r と δ_t が求まる。このようにして求めた数値を κ の関数として、図2～図5に実線のグラフで表してある。

図2と図4にある δ_r' と δ_t' は、光を逆行させた場合、すなわち、ガラス側から金属層へ入射角

$$\theta_3 = \text{Arc sin} \left(\frac{n_1}{n_3} \sin \theta_1 \right) = 28.13^\circ$$

で入射して、空気側へ $\theta_1 = 45^\circ$ で透過する場合の反射と透過による位相のずれである。

これらのグラフが示すように、S 偏光とP 偏光のいずれの場合でも、 δ_r と δ_t は π や 0 といった定数ではなく、金属の消衰係数 κ に応じて変化する。また、金属層の厚さは、 $2.5 \leq \kappa \leq 5.5$ の範囲に限れば、光の波長の数 % 程度である。

金属層の代わりに透明な誘電体膜をガラス板に張り付けた半透鏡の場合でも、 $\kappa = 0$ として上と同様の計算を行い、 n の関数として $\delta_r, \delta_t, w/\lambda$ を求めれば、図2～図5とよく似た曲線を得る⁸⁾。この場合も位相のずれが π や 0 といった定数になることはない。

§5. 光の吸収がある金属層の場合

金属層の複素屈折率 n_2 の実部 n と虚部 κ がともに 0 でない場合には、金属層で光の吸収が起こる。それによって位相のずれ δ_r と δ_t がどの程度の影響を受けるかを、数値計算によって調べてみよう。

光の吸収がない場合と同様に、 $n_1 = 1, n_3 = 1.5, \theta_1 = 45^\circ$ とすると、

$$\begin{aligned} k_{1x} &= k_1/\sqrt{2} \\ k_{2x} &= k_1\sqrt{(n - i\kappa)^2 - 0.5} \\ k_{3x} &= k_1\sqrt{1.5^2 - 0.5} \end{aligned}$$

となる。最初、光をよく反射する金属の屈折率の値として、 $n = 0.05$ を採用し、 κ の関数として δ_r と δ_t の値を次のようにして求める。

まず κ に正の数値を与える。次に、 $p = w/\lambda$ をパラメータとして、その値をいくつか適当に選んで、

$$\begin{aligned} g &= \exp(-i k_{2x} w) \\ &= \exp\left(-2 \pi p \sqrt{(n - i\kappa)^2 - 0.5} i\right) \end{aligned}$$

を計算し、その g の値から r と t 、さらに R と T を求める。得られた R と T の値から、半透鏡の条件式 $R = T$ を満たす p の値 p_0 を推測し、反復収束法で正確な p_0 を求める。 p_0 がわかると g_0 がわかるので、 r と t の複素数値が確定し、 δ_r と δ_t が求まる。加えて、金属層でのエネルギー吸収率 $K = 1 - (R + T)$ も求まる。

このようにして求めた数値を κ の関数としてグラフで表すと、 $n = 0$ のときのグラフ(図2～図5の実線)とほとんど同じで見分けがつかない。そこで、半透鏡に用いられる金属としては異常に大きな値 $n = 0.5$ を採用して、同じ計算を繰り返した。その結果を図2～図5に点線で示してある。これらを見ればわかるように、実線のグラフと関数形はよく似ており、縦軸方向へのずれの量はさほど大きくない。光が逆行するときには、 $\delta_r' \neq \delta_t$ となり、 w/λ の値も少し変化するのだが、その差は小さいので図には書き入れなかった。普通の半透鏡に用いられる金属では $n \ll 0.5$ であるから、金属層での反射と透過による位相のずれ $\delta_r, \delta_r', \delta_t, \delta_t'$ は、ガラス板の屈折率 n_3 と入射角 θ_1 が同じであれば、金属の消衰係数 κ でほぼ決まってしまうと言ってもよい。

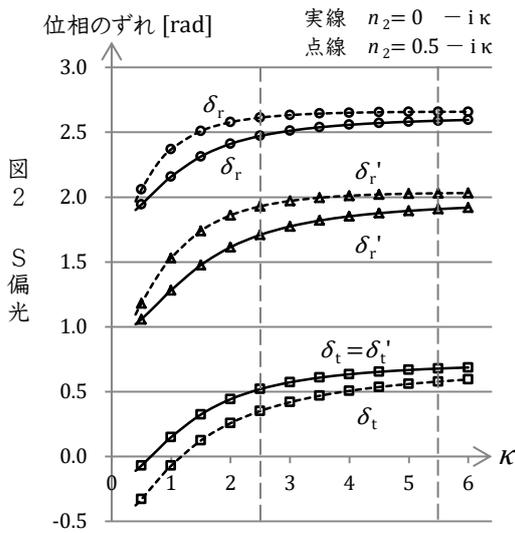


図 2
S 偏光

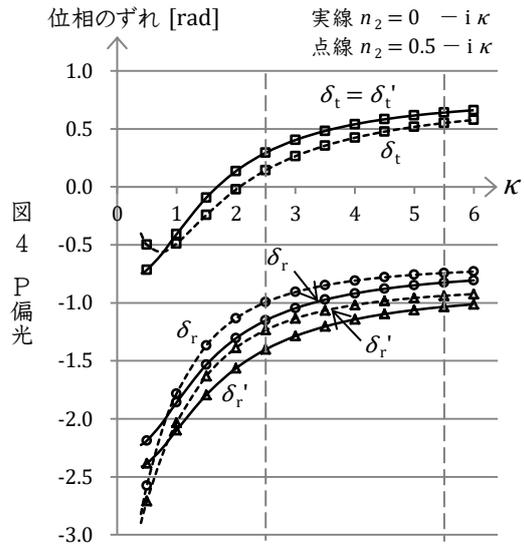


図 4
P 偏光

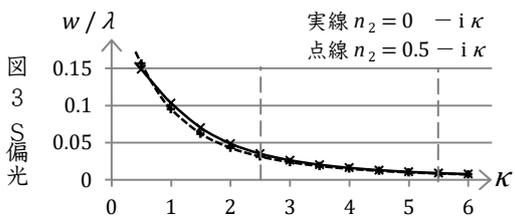


図 3
S 偏光

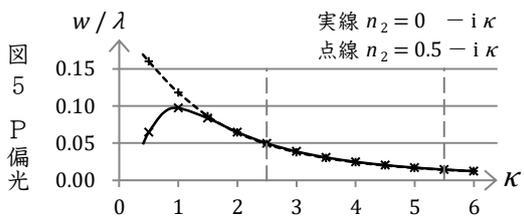


図 5
P 偏光

参考のために、 $n_2 = 0.05 - i\kappa$ の場合について、金属層でのエネルギー吸収率 K のグラフを図6に与えておく。

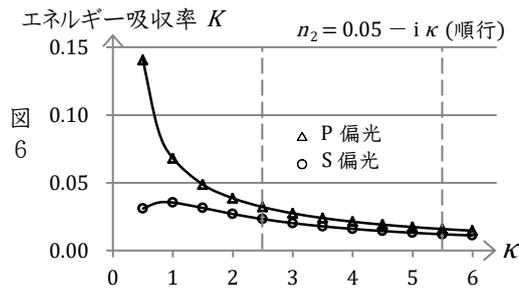


図 6

§ 6. おわりに

前節までの計算によって、半透鏡では入射波に対する反射波と透過波の位相のずれが一定値の π または 0 となることはありえないことがわかった。入射波に対する反射波と透過波の位相のずれが入射角に関係なく一定値をとるのは、筆者が知るかぎり、次の場合だけである。光の吸収がない2つの誘電体の境界面に光学的に疎な媒質から密な媒質に向かってS偏光が入射する場合、入射角に関係なく、 $\delta_r = \pi$ 、 $\delta_t = 0$ となる。これらの条件のうちどれか1つでも満たされない場合には、 δ_r と δ_t が π や 0 といった定数になることはない。光の吸収がある場合⁹⁾、あるいは金属面に入射する場合⁹⁾、あるいは光学的に密な媒質から疎な媒質に向かって入射す

る場合⁹⁾,あるいはP偏光の場合⁹⁾,あるいはここで考察した薄膜や多重層の場合には, δ_r (または δ_r と δ_t の両方)の値は入射角 θ_1 に依存する。上記の $\delta_r = \pi$ (一定), $\delta_t = 0$ (一定)となる例はむしろ例外と言うべきである。ところが,大学入試問題の中には,半透鏡や全反射鏡で光が反射する場合, $\delta_r = \pi$ と明記しているものや,明記はしていないがそのように考えないと解けない問題が多々ある。特殊な状況では $\delta_r = \pi$ となることも多分あるだろうという希望的観測のもとに,多くの大学が $\delta_r = \pi, \delta_t = 0$ を用いた入試問題を作成すると,受験生の間ではこれが「法則」になってしまう。密度の大きい媒質と光学的に密な誘電体を取り違えて,「密度が大きい金属の表面での反射では位相のずれは π 」と推定するような間違いを,物理教育の現場から排除しよう,というのが筆者の主張である。

参考文献

- 1) 齊藤全弘 : 「半透鏡での反射による位相のずれは π ではない(1)」 パリティ 28-3 (2013) 46-49.
- 2) 湯川秀樹, 田村松平 : 「物理学通論(中巻)」 大明堂(1961) p.146.
- 3) 古澤明 : 「量子もつれとは何か」(ブルーボックス B1715) 講談社(2011) p.124.
- 4) 齊藤全弘 : 「薄膜による光波の振幅反射率と振幅透過率の導出」
<http://www.eonet.ne.jp/~excitingphysics/>
- 5) 式①, ②と同等な式が次の文献にある。
マックス・ボルン, エミル・ウォルフ : 「光学の原理 I」
東海大学出版会(1975) p.93 式(57), (58).
- 6) R. ファインマン, R. レイトン, M. サンズ :
「ファインマン物理学 IV」 岩波書店(1971) p.178.
- 7) 齊藤全弘 : 「マイケルソン干渉計での干渉条件(2)」
- 8) 齊藤全弘 : 「誘電体の薄膜で作られた半透鏡と反射防止膜」
- 9) 齊藤全弘 : 「光の反射と透過に伴う位相のずれ(1)」

「熱中物理」に掲載されている論文の要約

は [こちらへ](#)