マイケルソン干渉計での干渉条件（2）

斉藤　全弘

§1　金属の複素屈折率

前稿（文献1）では，マイケルソン干渉計で光のエネルギーの吸収がない場合について，干渉条件を導いた。本稿では半透鏡でエネルギーの吸収がある場合を考察するが，一般的な状況での理論計算は困難であるから，具体例で数値計算をする。その準備として，半透鏡の蒸着金属の複素屈折率を計算する。

角振動数ωの光波に対する金属の複素屈折率n_2は，次式で与えられる（文献2）。

$$n_2 = \sqrt{1 + \frac{\sigma / \varepsilon_0}{\mathrm{i}\,\omega\,(1 + \mathrm{i}\,\omega\,\tau)}}$$

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \quad , \qquad \tau = \frac{m\,\sigma}{N\,{q_\mathrm{e}}^2}$$

ただし，σ は金属の伝導度，ρ は抵抗率，τ は伝導電子の平均自由時間，m と q_e は電子の質量と電気量，N は伝導電子の個数密度，ε_0 は真空の誘電率である。この式を導出するとき，束縛電子からの寄与は無視している。1 個の金属原子が f 個の伝導電子を供給しているとすると，金属の密度を d，単位物質量あたりの質量を μ，アボガドロ定数を N_A として，N は次式で与えられる。

$$N = f\,N_\mathrm{A}\,\frac{d}{\mu}$$

一例として，銀の複素屈折率を計算してみよう。この場合，

$$d = 10.5\ \mathrm{g\,cm^{-3}} \quad , \quad \rho = 1.62 \times 10^{-8}\ \Omega\,\mathrm{m} \quad , \quad \mu = 108\ \mathrm{g\,mol^{-1}}$$

である。これらを上式に代入すると，波長 λ [nm] の光波に対する複素屈折率は，

$$n_2 = \sqrt{1 - \frac{3.70\,\lambda^2}{7.07\times10^4\,f^{-1} - \mathrm{i}\,\lambda}}$$

となる。ここで，$f = 1$ として数値計算をすれば，可視領域で，

$$n_2 = n_\mathrm{R} - \mathrm{i}\,n_\mathrm{i} \quad , \qquad n_\mathrm{R} \ll 1\,, \qquad n_\mathrm{i} = 2.5\text{~}5.5$$

となることがわかる。n_R と n_i を λ の関数としてグラフで表せば，図1の実線のようになる。f の値を少し変えて計算すれば，

$$\left(\frac{\partial\,n_\mathrm{R}}{\partial\,f}\right)_{f=1} \fallingdotseq \begin{cases} 0.011 & : \lambda = 380\mathrm{nm} \\ 0.046 & : \lambda = 770\mathrm{nm} \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial\,n_\mathrm{i}}{\partial\,f}\right)_{f=1} \fallingdotseq \begin{cases} 1.5 & : \lambda = 380\mathrm{nm} \\ 2.8 & : \lambda = 770\mathrm{nm} \end{cases}$$

となるので，可視領域では n_R と n_i はどちらも f の単調増加関数である。

アルミニウムで計算しても，$n_2\,(\lambda,\,f)$ の関数形は銀の場合とよく似ており，図1の破線のようになる。

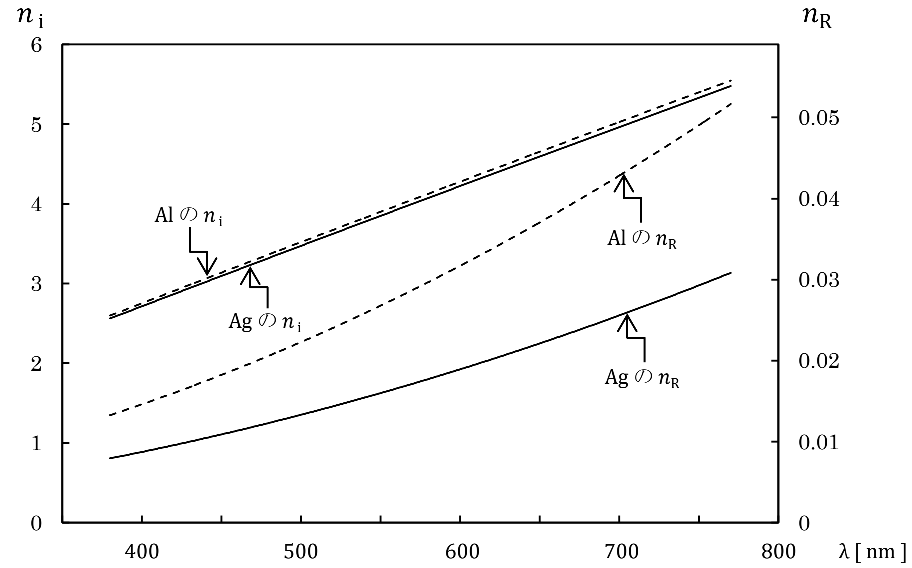

図1　Ag と Al の複素屈折率

§2　エネルギー損失のある半透鏡

図2のように，厚さ d_3，屈折率 $n_3 = 1.6$ のガラス板の片面に銀を薄く蒸着した半透鏡に，空気側から金属層に向かって，波長 λ の平面波が入射角 $\theta_1 = 45°$ で入射する場合を考える。以下ではこの向きの入射を順行と呼ぶことにする。厚さ d_2，屈折率 n_2 の金属層による振幅反射率 r_0 と振幅透過率 t_0 は次式で与えられる（文献3）。

S 偏光の場合，

$$r_0 = \frac{g^2\,(k_{2x}-k_{3x})(k_{1x}+k_{2x})+(k_{2x}+k_{3x})(k_{1x}-k_{2x})}{g^2\,(k_{2x}-k_{3x})(k_{1x}-k_{2x})+(k_{2x}+k_{3x})(k_{1x}+k_{2x})}$$

$$t_0 = \frac{4\,g\,k_{1x}\,k_{2x}}{g^2\,(k_{2x}-k_{3x})(k_{1x}-k_{2x})+(k_{2x}+k_{3x})(k_{1x}+k_{2x})}$$

P 偏光の場合，

$$r_0 = \frac{g^2\left(n_3^2k_{2x}-n_2^2k_{3x}\right)\left(n_2^2k_{1x}+n_1^2k_{2x}\right)+\left(n_3^2k_{2x}+n_2^2k_{3x}\right)\left(n_2^2k_{1x}-n_1^2k_{2x}\right)}{g^2\left(n_3^2k_{2x}-n_2^2k_{3x}\right)\left(n_2^2k_{1x}-n_1^2k_{2x}\right)+\left(n_3^2k_{2x}+n_2^2k_{3x}\right)\left(n_2^2k_{1x}+n_1^2k_{2x}\right)}$$

$$t_0 = \frac{4g\,n_1\,n_2^2\,n_3\,k_{1x}\,k_{2x}}{g^2\left(n_3^2k_{2x}-n_2^2k_{3x}\right)\left(n_2^2k_{1x}-n_1^2k_{2x}\right)+\left(n_3^2k_{2x}+n_2^2k_{3x}\right)\left(n_2^2k_{1x}+n_1^2k_{2x}\right)}$$

ただし，

$$g = \exp(-\mathrm{i}\,k_{2x}\,d_2)$$
$$k_{1x} = k_1\sqrt{n_1^2-\sin^2\theta_1} = k_1\cos\theta_1$$
$$k_{2x} = k_1\sqrt{n_2^2-\sin^2\theta_1}$$
$$k_{3x} = k_1\sqrt{n_3^2-\sin^2\theta_1}$$

であり，$n_1 = 1.0$ は空気の屈折率，$k_1 = 2\pi/\lambda$ は空気中での光の波数ベクトルの大きさである。また，k_{1x}，k_{2x}，k_{3x} はそれぞれ，空気中，金属中，ガラス中での波数ベクトルのガラス板に垂直な方向の成分である。エネルギー反射率 R_0 とエネルギー透過率 T_0，および反射と透過による位相のずれ δ_{r} と δ_{t} は次式で与えられる。

$$R_0 = |r_0|^2$$
$$T_0 = |t_0|^2 \frac{k_{3x}}{k_{1x}}$$
$$\delta_r = \mathrm{Arg}(r_0)$$
$$\delta_t = \mathrm{Arg}(t_0)$$

まず，$p = d_2 / \lambda$として，その値をいくつか適当に選び，R_0とT_0を計算する。次に，それらの値をもとに反復収束法によって，半透鏡の定義式$R_0 = T_0$を満たすpの値を求める（注）。表1と表2には，波長λが380nmと770nmの2つの場合について，上記のようにして求めたpの値とそのときのr_0，t_0，$R_0 = T_0$，エネルギーの吸収率$1-(R_0+T_0)$，δ_r，δ_tの値が，S 偏光と P 偏光の2つの場合に分けて与えられている。下段の$'$のついた量は光が逆行する場合，すなわち，ガラス側から金属層に入射角$\theta_3 = 26.23°$で入射し，空気側へ$\theta_1 = 45°$で透過する場合を表している。これらは，上記の諸式で添字の 1 と 3 を置き換えた式から計算できる。

表に見られるように，銀の蒸着層の厚さd_2は，順行の場合と逆行の場合でわずかに異なるが，その差は小さく，いずれの場合でも，S 偏光のときは波長の約 3.4％（紫）～0.92％（赤）で，P 偏光のときは波長の約 4.8％（紫）～1.5％（赤）である。

エネルギーの吸収率も順行の場合と逆行の場合で異なる。順行の場合，S 偏光のときは 0.35％（紫）～0.70％（赤）で，P偏光のときは約0.50％（紫）～0.96％（赤）である。また，逆行の場合，S偏光のときは，0.69％（紫）～1.42％（赤）で，P偏光のときは，0.60％（紫）～1.20％（赤）である。

エネルギーの吸収がない場合には，位相のずれδ_r，δ_t，δ_r'，δ_t'の間に，

$$|(\delta_r + \delta_r') - (\delta_t + \delta_t')| = \pi$$

の関係が成り立つ（文献1）のだが，エネルギーの吸収がある場合には，左辺の値は，S偏光ではπよりわずかに大きくなり，P偏光の場合には，πよりわずかに小さくなる。

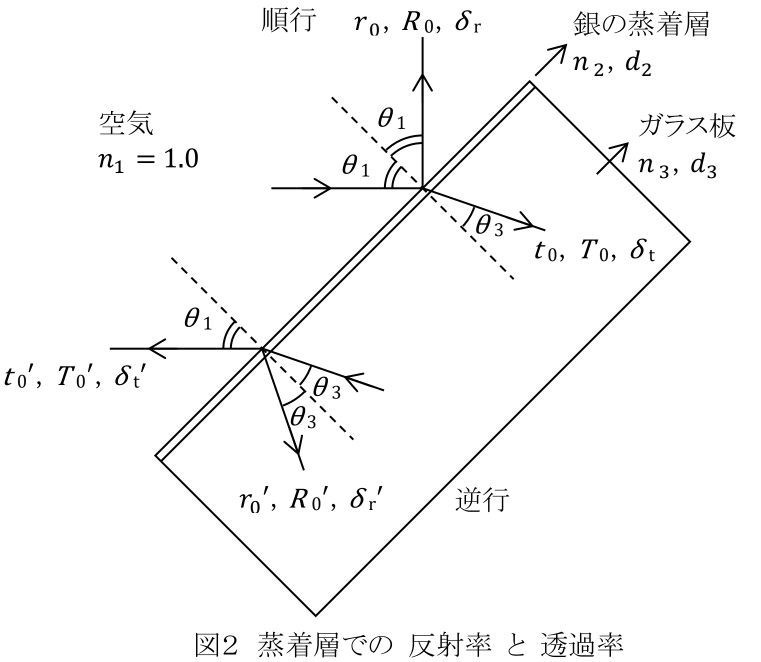

図2 蒸着層での 反射率 と 透過率

表1　半透鏡の反射率と透過率および位相のずれ

λ= 380nm　n_2 = 7.931×10⁻³ −2.561 i		
	S 偏 光	P 偏 光
$p = d_2/\lambda$	0.03408	0.04839
r_0	− 0.5692 + 0.4174 i	0.3087 − 0.6342 i
t_0	0.4353 + 0.2365 i	0.4742 + 0.1421 i
$R_0 = T_0$	0.4983	0.4975
$1 - R_0 - T_0$	0.003469	0.004966
δ_r[rad]	2.5089	− 1.1178
δ_t[rad]	0.4977	0.2911
p'	0.03420	0.04843
r_0'	− 4.837×10⁻² − 0.7030 i	9.775×10⁻² − 0.6982 i
t_0'	0.8816 + 0.4804 i	0.9621 + 0.2885 i
$R_0' = T_0'$	0.4966	0.4970
$1-R_0'-T_0'$	0.006891	0.005982
δ_r' [rad]	1.6394	− 1.4317
δ_t' [rad]	0.4989	0.2913

表2　半透鏡の反射率と透過率および位相のずれ

λ= 770nm　n_2 = 3.083×10⁻² −5.480 i		
	S 偏 光	P 偏 光
$p = d_2/\lambda$	0.009206	0.01471
r_0	− 0.6121 + 0.3490 i	0.4894 − 0.5057 i
t_0	0.3931 + 0.3001 i	0.4003 + 0.2894 i
$R_0 = T_0$	0.4965	0.4952
$1 - R_0 - T_0$	0.007012	0.009581
δ_r[rad]	2.6235	− 0.8017
δ_t[rad]	0.6520	0.6260
p'	0.009281	0.01474
r_0'	− 0.1916 + 0.6754 i	0.3404 − 0.6149 i
t_0'	0.7929 + 0.6098 i	0.8189 + 0.5875 i
$R_0' = T_0'$	0.4929	0.4940
$1-R_0'-T_0'$	0.01423	0.01204
δ_r' [rad]	1.8472	− 1.0653
δ_t' [rad]	0.6556	0.6270

§３　マイケルソン干渉計

図3はマイケルソン干渉計の模式図で，半透鏡Ｈは§２ で考察したものを用い，補償板Ｃの厚さと屈折率は半透鏡のガラス板と同じとする。補償板を挿入しない場合，検出器Ｄと光源Ｓへ伝わる光のエネルギーの割合 F_D と F_S は，

$$F_D = \left| \rho\,\tau + \tau\,\rho' e^{-i\delta}\, e^{-i\gamma} \right|^2$$
$$F_S = \left| \rho^2 + \tau\,\tau' e^{-i\delta} \right|^2$$

で与えられ，補償板を挿入した場合は，

$$F_D = \left| \rho\,\tau_C^2\,\tau + \tau\,\rho' e^{-i\delta}\, e^{-i\gamma} \right|^2$$
$$F_S = \left| \rho\,\tau_C^2\,\rho + \tau\,\tau' e^{-i\delta} \right|^2$$

で与えられる。ただし，ρ , ρ' と τ , τ' は半透鏡Ｈによる振幅反射率と振幅透過率で，$'$ がついていないものは順行の場合を，$'$ がついているものは逆行の場合を表す。また，τ_C は補償板Ｃでの振幅透過率である。これらは次式から計算できる（文献1，4）。

$$\rho = \frac{r_0 + (t_0\,t_0' - r_0\,r_0')\,r'\,e^{-i\alpha}}{1 - r_0'\,r'\,e^{-i\alpha}}$$

$$\rho' = \frac{r + r_0'\,e^{-i\alpha}}{1 - r_0'\,r'\,e^{-i\alpha}}$$

$$\tau = \frac{t_0\,t'\,e^{-i\beta}}{1 - r_0'\,r'\,e^{-i\alpha}}$$

$$\tau' = \frac{t_0' \, t \, e^{-i\beta}}{1 - r_0' \, r' \, e^{-i\alpha}} = \tau$$

$$\tau_C = \frac{(1 - r^2) \, e^{-i\beta}}{1 - r^2 \, e^{-i\alpha}}$$

ただし，r ，r' と t ，t' は空気とガラスの境界面での振幅反射率と振幅透過率で，$'$ がついていないものは空気側から入射する場合を，$'$ がついているものはガラス側から入射する場合を表しており，S 偏光では，

$$r = \frac{k_{1x} - k_{3x}}{k_{1x} + k_{3x}} = -r'$$

$$t = \frac{2\,k_{1x}}{k_{1x} + k_{3x}} \quad , \qquad t' = \frac{2\,k_{3x}}{k_{3x} + k_{1x}}$$

P 偏光では，

$$r = \frac{n_3^2 k_{1x} - n_1^2 k_{3x}}{n_3^2 k_{1x} + n_1^2 k_{3x}} = -r'$$

$$t = \frac{2\,n_1\,n_3\,k_{1x}}{n_3^2 k_{1x} + n_1^2 k_{3x}} \quad , \quad t' = \frac{2\,n_3\,n_1\,k_{3x}}{n_1^2 k_{3x} + n_3^2 k_{1x}}$$

で与えられる。さらに，β はガラス板内へ屈折した光のガラス板の両端での位相差で，γ は図3の Q 点と Q′ 点での位相の差であり，それぞれ

$$\beta = \frac{2\pi d_3}{\lambda} \, \frac{n_3^2}{\sqrt{n_3^2 - \sin^2\theta_1}}$$

$$\gamma = \frac{4\pi d_3}{\lambda} \, \frac{\sin^2\theta_1}{\sqrt{n_3^2 - \sin^2\theta_1}}$$

と表される。また，α はガラス板内で多重反射して外に出て来た隣り合う2つの光の光路差による位相差で，

$$\alpha = 2\beta - \gamma = \frac{4\pi d_3}{\lambda} \, \sqrt{n_3^2 - \sin^2\theta_1}$$

である。δ は全反射鏡 M_1 と M_2 で反射される2つの光が空気中を伝わるときの光路差による位相差で，

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda} \left(L_2 - L_1 \right) \, , \quad L_1 = L_{11} + L_{12}$$

である。

一例として，波長 $\lambda = 633$ nm のレーザー光で S 偏光の場合について，数値計算をしてみよう。α ，β ，γ を計算するためにはガラス板の厚さ d_3 の値が必要になるが，ここでは適当に，$d_3 = 4$ mm とする。n_3 は 1.6 とする。

まず，§1 と同様に，$f=1$として銀の複素屈折率n_2を計算する。次に，§2 の手順に従って，順行の場合に$R_0=T_0$を満たす$p=\ d_2\,/\,\lambda$の値とそのときのr_0，t_0，δ_r， δ_tを計算する。そして，この p の値を用いて逆行の場合の $r_0{}'$，$t_0{}'$，$\delta_\mathrm{r}{}'$， $\delta_\mathrm{t}{}'$を計算する。したがって，この場合には$R_0{}'=T_0{}'$とはならないが，その差はわずかである。次にr_0，$r_0{}'$，t_0，$t_0{}'$，r ，r'， t，t'，α, β を用いて，ρ，ρ'，τ，τ'，τ_Cを計算する。ここで全反射鏡M_1を固定してM_2をゆっくり移動させると，δが変化する。このとき，$0\leqq\delta\leqq2\pi$の範囲内でF_DとF_Sを計算し，それらをδの関数としてグラフに表せば，図4（ C を挿入しない場合 ）と図5（ C を挿入した場合 ）のようになる。実線はF_Dを，点線はF_Sを，破線は$F_\mathrm{D}+F_\mathrm{S}$を表している。$F_\mathrm{D}+F_\mathrm{S}$の変化は小さいので，その尺度を拡大して描いてある。

これらの図からわかるように，金属層で吸収されるエネルギーは入射光のエネルギーの数%程度であるが，補償板 C を挿入すると，光学系の外部に出ていく光のエネルギーが入射光のエネルギーの 10%程度になる。ガラス板の厚さd_3を変えて計算すると，この値が 30%を超えることもある。

補償板 C を挿入した場合，$L_1=L_2$（すなわち，$\delta=0$）のとき，検出器 D での明るさが最大になっていない。この一例をみても，“常識的な干渉条件”：

「 $2\,(L_2-L_1)=m\,\lambda$ （mは整数) のとき 検出器 D で明るくなる 」

は間違っていることがわかる。エネルギーの吸収がある場合には，ガラス板の厚さd_3がある特定の値をとるときに，“常識的な干渉条件”が成り立つことがあるが，それはあくまでも例外である。

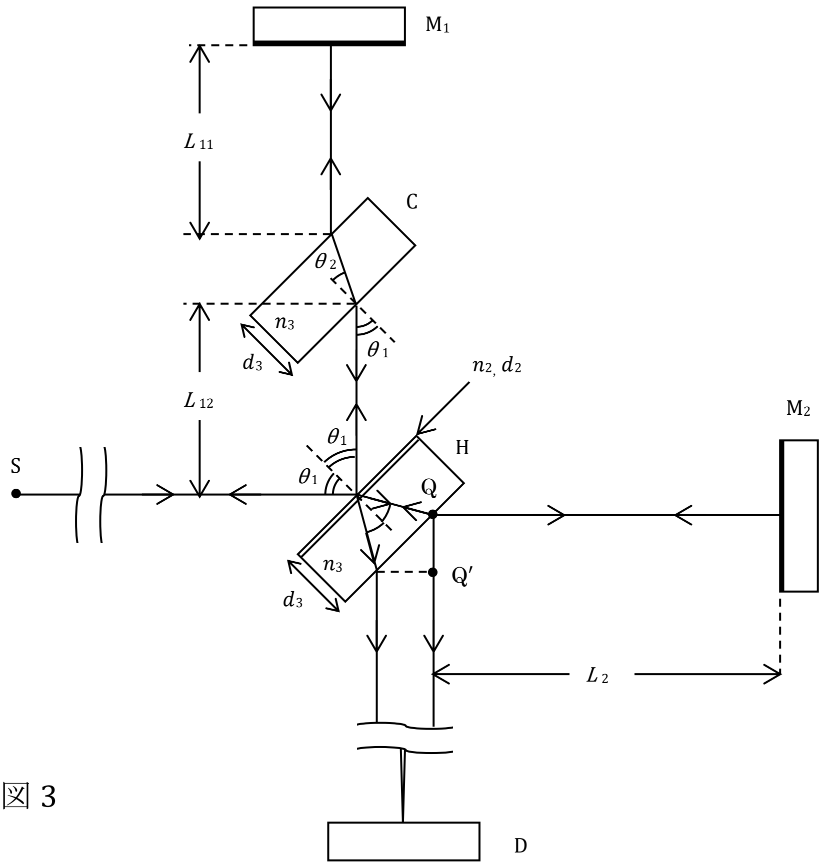

図 3

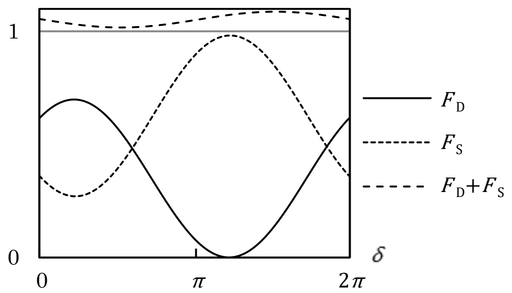

図4　検出器と光源に伝わるエネルギーの割合
（補償板がない場合）
破線の極大値は 0.986，極小値は0.964

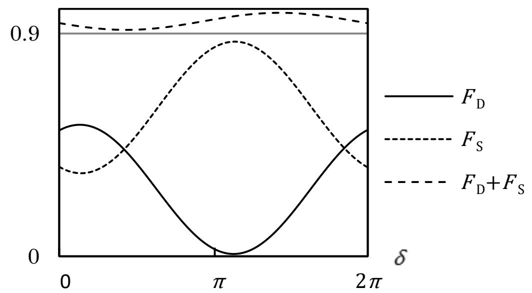

図5　検出器と光源に伝わるエネルギーの割合
（補償板がある場合）
破線の極大値は 0.880，極小値は0.864

（注）

ガラス板内での多重反射を取り入れて，半透鏡全体のエネルギー反射率とエネルギー透過率が等しくなるものを半透鏡の定義にしてもよいが，その場合には，d_2 と d_3 の組み合わせで無数の解があり，p の値は一意的に決まらない。

参考文献

1)　斉藤全弘　：　マイケルソン干渉計での干渉条件（1），
2)　ファインマン，レイトン，サンズ　：　ファインマン物理学 IV ，岩波書店(1971) p.178.
3)　斉藤全弘　：　マッハ・ツェンダー干渉計での干渉条件（2），
4)　斉藤全弘　：　マッハ・ツェンダー干渉計での干渉条件（1），

「熱中物理」に掲載されている論文の要約　は　こちらへ