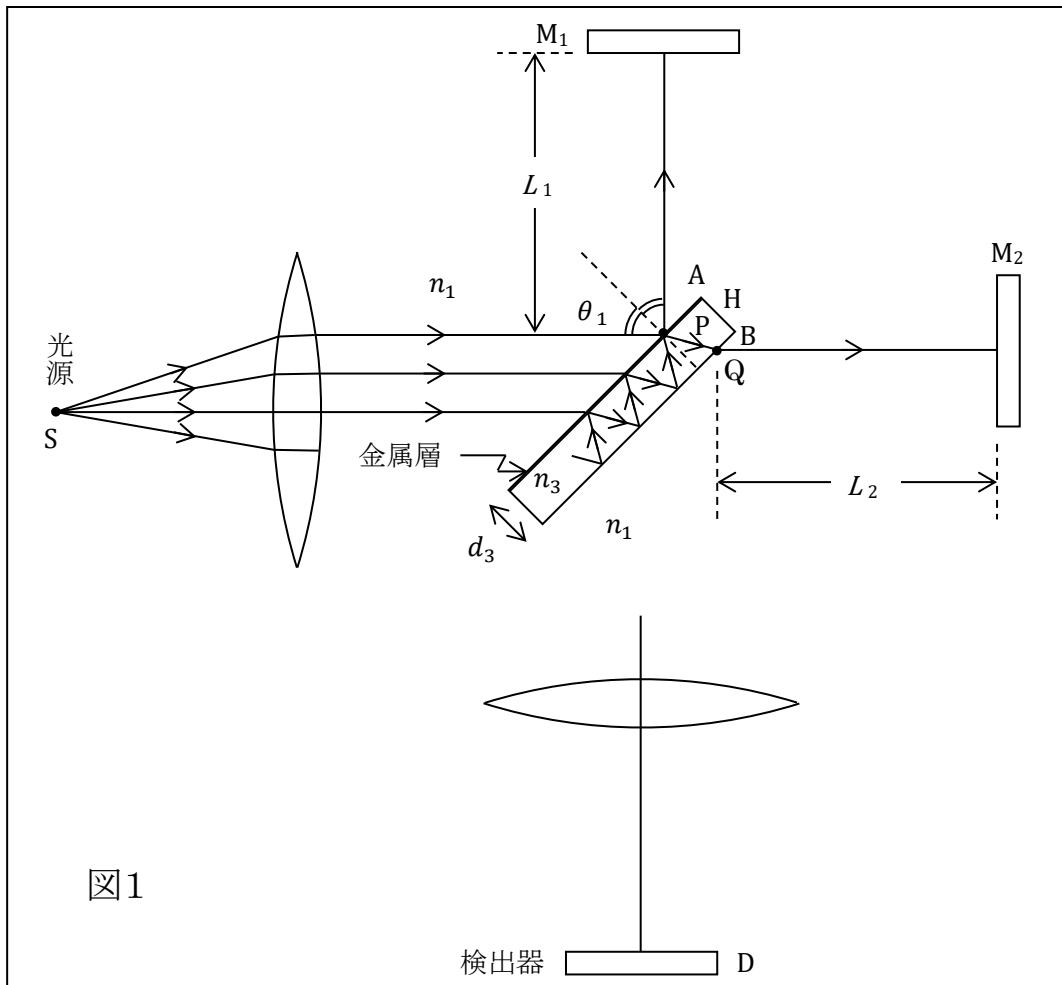


§1 レーザー光の場合

図1のようなマイケルソン干渉計の検出器Dで、レーザー光が強め合ったり弱め合ったりする条件を求める。装置全体は屈折率  $n_1 (= 1.0)$  の空気中にあり、半透鏡Hのガラス板の厚さは  $d_3$ 、屈折率は  $n_3 (\sim 1.6)$  である。半透鏡のA面に蒸着してある金属層の厚さ  $d_2$  は光の波長に比べて充分小さく、その複素屈折率は  $n_2 = n_R - i n_i (n_i \gg n_R \sim 0)$  と表されるものとする。光源Sを出た波長  $\lambda$  のレーザー光が平面波となって、入射角  $\theta_1 (= 45^\circ)$  でA面上のP点に入射するときの複素振幅を  $A_0$  とする。Pから全反射鏡  $M_1$  に向かう光は、Pで反射した光以外に、図1のように、Hの左下で多重反射した光も含んでいる。それらの合成波のPでの複素振幅は  $A_0 \rho$  である。同様に、B面のQ点から全反射鏡  $M_2$  に向かう合成波のQでの複素振幅は  $A_0 \tau$  である。半透鏡による振幅反射率  $\rho$  と振幅透過率  $\tau$  は次節の⑮式と⑰式に与えられている。 $M_1$  と  $M_2$  で全反射してPとQに戻ってきた光は、図2と図3のように、H内で多重反射したあと検出器Dと光源Sへ伝わる。これらの光をDとSで重ね合わせた合成波の複素振幅は、それぞれ、



$$A_D = A_0 (\rho \tau e^{-2i k_1 L_1} + \tau \rho' e^{-2i k_1 L_2} e^{-i\gamma}) e^{-i(\mu + k_1 L_D)} \quad (1)$$

$$A_S = A_0 (\rho^2 e^{-2i k_1 L_1} + \tau \tau' e^{-2i k_1 L_2}) e^{-i(\mu + k_1 L_S)} \quad (2)$$

となる。ただし、 $\rho'$  と  $\tau'$  は H の B 面から光が入射したときの振幅反射率と振幅透過率(次節の⑩式と⑪式)であり、 $k_1 = 2\pi / \lambda$  は空気中での波数、 $L_1, L_2, L_D, L_S$  は、それぞれ、P と  $M_1$ 、Q と  $M_2$ 、Q' と D、P と S の間の光路長である。また、 $\mu$  は光が  $M_1, M_2$  で全反射したときの位相の遅れ、 $\gamma$  は図3の Q 点と Q' 点での位相の差であり、

$$\gamma = k_1 \overline{QQ'} = \frac{4\pi d_3}{\lambda} \frac{\sin^2 \theta_1}{\sqrt{n_3^2 - \sin^2 \theta_1}} \quad (3)$$

と表される。光源から半透鏡に入射した光のエネルギーのうち、D と S に向かうエネルギーの割合は、それぞれ、

$$F_D = \left| \frac{A_D}{A_0} \right|^2 = (\rho \tau + \tau \rho' e^{-i\delta} e^{-i\gamma})(\bar{\rho} \bar{\tau} + \bar{\tau} \bar{\rho}' e^{i\delta} e^{i\gamma}) \quad (4)$$

$$F_S = \left| \frac{A_S}{A_0} \right|^2 = (\rho^2 + \tau \tau' e^{-i\delta})(\bar{\rho}^2 + \bar{\tau} \bar{\tau}' e^{i\delta}) \quad (5)$$

となる。ただし、 $\bar{\phantom{x}}$  は複素共役を表し、

$$\delta = 2 k_1 (L_2 - L_1) \quad (6)$$

である。次節で示すように、一般的に  $\tau' = \tau$  が成り立ち、金属層の屈折率の実部  $n_R$  が 0 である場合( $n_2 = -i n_i$ )には、 $|\rho'| = |\rho|$  が成り立つので、この場合に限り、

$$F_D = 2 |\rho|^2 |\tau|^2 + 2 \operatorname{Re}(\rho \bar{\rho}' |\tau|^2 e^{i\delta} e^{i\gamma}) \quad (7)$$

$$F_S = |\rho|^4 + |\tau|^4 + 2 \operatorname{Re}(\rho^2 \bar{\tau}^2 e^{i\delta}) \quad (8)$$

よって、

$$F_D + F_S = (|\rho|^2 + |\tau|^2)^2 + 2 \operatorname{Re}\{(\bar{\rho}' \tau e^{i\gamma} + \rho \bar{\tau}) \rho \bar{\tau} e^{i\delta}\} \quad (9)$$

となる。さらに、⑨式右辺の第1項は 1、第2項は 0 となるのが次節で示されるので、エネルギー保存則

$$F_D + F_S = 1 \quad (10)$$

が成り立つ。したがって、D で強め合うときには S で弱め合い、D で弱め合うときには S で強め合う。

次に、 $n_2 = -i n_i$  であるときに、

$$\rho \bar{\rho}' = |\rho|^2 e^{i\varphi} \quad (11)$$

とおけば、⑦式は、

$$F_D = 2 |\rho|^2 |\tau|^2 \{1 + \cos(\delta + \gamma + \varphi)\} \quad (12)$$

となるので、検出器 D での干渉条件は、整数を  $m$  として、次のように表される。

$$2 k_1 (L_2 - L_1) + \gamma + \varphi = \pi \times \left\{ \frac{2m}{2m+1} \right\} \text{ のとき } \left\{ \begin{array}{l} \text{強} \\ \text{弱} \end{array} \right\} \text{ め合う。} \quad (13)$$

大学入試問題などでは、 $d_3 \ll \lambda$  を仮定することが多い。その場合、近似的に  $\gamma = 0$  であるから、⑬式は次のように書き換えられる。

$$2(L_2 - L_1) = \lambda \times \left\{ \begin{array}{l} m - \frac{\varphi}{2\pi} \\ (m + \frac{1}{2}) - \frac{\varphi}{2\pi} \end{array} \right\} \text{ のとき } \left\{ \begin{array}{l} \text{強} \\ \text{弱} \end{array} \right\} \text{ め合う。} \quad (14)$$

ところが、このような入試問題の解答例では、例外なく、⑭式の  $\varphi$  を 0 とした答を正解としている。しかし、 $n_2 = -in_1$  かつ  $d_3 \ll \lambda$  の条件のもとでは、 $\varphi = 0$  となることはない。その証明は次節で行う。

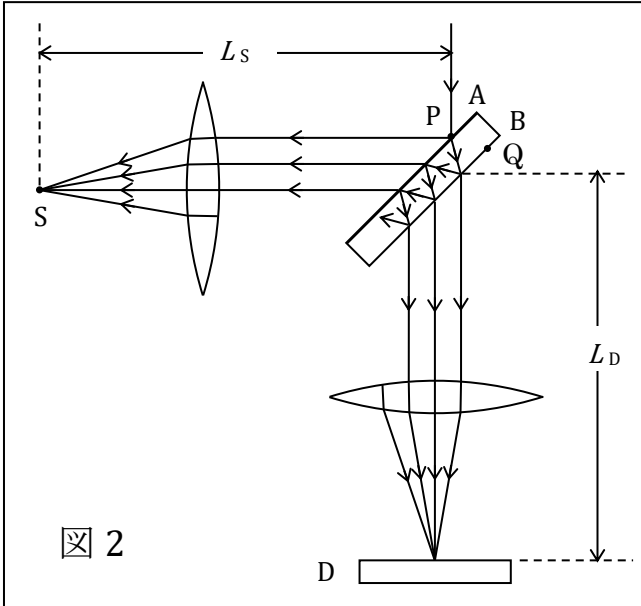


図 2

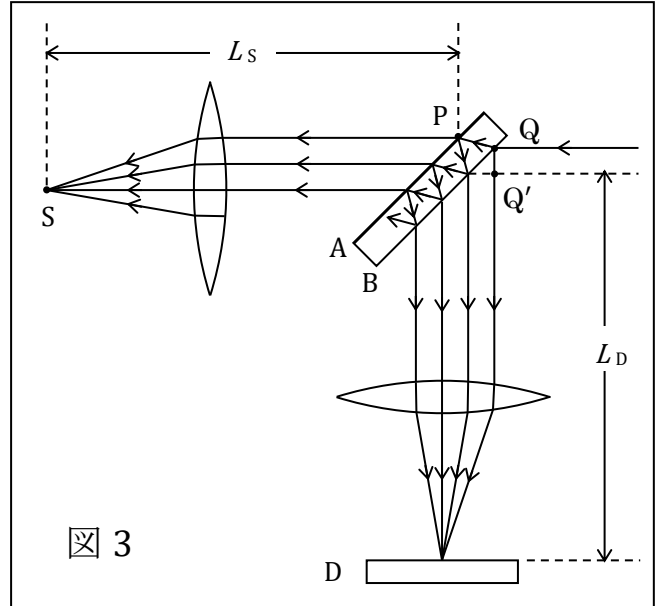


図 3

## § 2 証明の概要

半透鏡による振幅反射率  $\rho$ ,  $\rho'$  と振幅透過率  $\tau$ ,  $\tau'$  は次式で与えられる(文献1)。

$$\rho = \frac{r_0 + (t_0 t_0' - r_0 r_0') r' e^{-i\alpha}}{1 - r_0' r' e^{-i\alpha}} \quad (15)$$

$$\rho' = \frac{r + r_0' e^{-i\alpha}}{1 - r_0' r' e^{-i\alpha}} \quad (16)$$

$$\tau = \frac{t_0 t' e^{-i\beta}}{1 - r_0' r' e^{-i\alpha}} \quad (17)$$

$$\tau' = \frac{t_0' t e^{-i\beta}}{1 - r_0' r' e^{-i\alpha}} \quad (18)$$

ただし、 $\alpha$  は図2と図3で D と S に向かう隣り合った2つの光の光路差による位相差、 $\beta$  はガラス板を横切る光の P 点と Q 点での位相差で、それぞれ、

$$\alpha = \frac{4\pi d_3}{\lambda} \sqrt{n_3^2 - \sin^2 \theta_1} \quad (19)$$

$$\beta = \frac{2\pi d_3}{\lambda} \frac{n_3^2}{\sqrt{n_3^2 - \sin^2 \theta_1}} \quad (20)$$

と表される。 $\alpha$ ,  $\beta$  と ③式の  $\gamma$  の間には次式が成り立つ。

$$\alpha = 2\beta - \gamma \quad (21)$$

さらに、 $r_0$ ,  $r_0'$  と  $t_0$ ,  $t_0'$  は半透鏡の金属層による振幅反射率と振幅透過率で、' がついていない量は光が空気側から金属層に入射する場合を、' がついていない量はガラス側から金属層に入射する場合を表す。また、 $r$  と  $t$  は空気側から直接ガラス板へ入射するときの振幅反射率と振幅透過率で、 $r'$  と  $t'$  は逆向きに入射するときの振幅反射率と振幅透過率である。これらの値は入射平面波

の偏光によって異なる。S 偏光のときは、

$$r_0 = \frac{g^2 (k_{2x} - k_{3x})(k_{1x} + k_{2x}) + (k_{2x} + k_{3x})(k_{1x} - k_{2x})}{g^2 (k_{2x} - k_{3x})(k_{1x} - k_{2x}) + (k_{2x} + k_{3x})(k_{1x} + k_{2x})} \quad (22)$$

$$t_0 = \frac{4g k_{1x} k_{2x}}{g^2 (k_{2x} - k_{3x})(k_{1x} - k_{2x}) + (k_{2x} + k_{3x})(k_{1x} + k_{2x})} \quad (23)$$

$$r = \frac{k_{1x} - k_{3x}}{k_{1x} + k_{3x}} \quad (24)$$

$$t = \frac{2k_{1x}}{k_{1x} + k_{3x}} \quad (25)$$

であり、P 偏光のときは、

$$r_0 = \frac{g^2 (n_3^2 k_{2x} - n_2^2 k_{3x})(n_2^2 k_{1x} + n_1^2 k_{2x}) + (n_3^2 k_{2x} + n_2^2 k_{3x})(n_2^2 k_{1x} - n_1^2 k_{2x})}{g^2 (n_3^2 k_{2x} - n_2^2 k_{3x})(n_2^2 k_{1x} - n_1^2 k_{2x}) + (n_3^2 k_{2x} + n_2^2 k_{3x})(n_2^2 k_{1x} + n_1^2 k_{2x})} \quad (26)$$

$$t_0 = \frac{4g n_1 n_2^2 n_3 k_{1x} k_{2x}}{g^2 (n_3^2 k_{2x} - n_2^2 k_{3x})(n_2^2 k_{1x} - n_1^2 k_{2x}) + (n_3^2 k_{2x} + n_2^2 k_{3x})(n_2^2 k_{1x} + n_1^2 k_{2x})} \quad (27)$$

$$r = \frac{n_3^2 k_{1x} - n_1^2 k_{3x}}{n_3^2 k_{1x} + n_1^2 k_{3x}} \quad (28)$$

$$t = \frac{2n_1 n_3 k_{1x}}{n_3^2 k_{1x} + n_1^2 k_{3x}} \quad (29)$$

である(文献2)。 $'$ がついた量を得るには、②式～⑨式において次の置換を行えばよい。

$$k_{1x} \rightarrow k_{3x}, \quad k_{2x} \rightarrow k_{2x}, \quad k_{3x} \rightarrow k_{1x}$$

$$n_1 \rightarrow n_3, \quad n_2 \rightarrow n_2, \quad n_3 \rightarrow n_1$$

これらの式において、 $k_{jx}$  ( $j = 1, 2, 3$ ) は領域  $j$  における光の波数ベクトルのガラス板に垂直な方向の成分であり、

$$k_{1x} = k_1 \cos \theta_1 \quad (30)$$

$$k_{2x} = k_1 \sqrt{n_2^2 - \sin^2 \theta_1} \quad (31)$$

$$k_{3x} = k_1 \sqrt{n_3^2 - \sin^2 \theta_1} \quad (32)$$

と表される。また、

$$g = e^{-i k_{2x} d_2} \quad (33)$$

である。 $n_2 = -i n_i$  のとき、 $k_{2x}$  は  $i$  の係数が負の虚数となるので、 $1 > g > 0$  である。

まず、③、④、⑤式または⑦、⑧、⑨式とそれらの置換式から、

$$r' = -r \quad (34)$$

$$t t' = 1 - r^2 \quad (35)$$

$$t_0' t = t_0 t' \quad (36)$$

の関係式が導かれ、⑩、⑪、⑫式より、

$$\tau' = \tau \quad (37)$$

を得る。

次に、 $n_2 = -i n_i$  を仮定すれば、 $r_0, r_0', t_0, t_0'$  の間に以下の関係式が成り立つことがわかる。その証明は、以下の式に②、③式または⑥、⑦式とそれらの置換式を代入し、 $\overline{k_{2x}} = -k_{2x}$  に注

意して長い式の計算をすればできる。

$$\left. \begin{aligned} r_0 \bar{r}_0 + \bar{t}_0 t_0' = 1 &\Leftrightarrow \bar{r}_0 r_0 + t_0 \bar{t}_0' = 1 \\ &\Downarrow \text{逆行} \quad \text{共役} \quad \Downarrow \text{逆行} \\ r_0' \bar{r}_0' + \bar{t}_0' t_0 = 1 &\Leftrightarrow \bar{r}_0' r_0' + t_0' \bar{t}_0 = 1 \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

$$\left. \begin{aligned} r_0 \bar{t}_0 + \bar{r}_0' t_0 = 0 &\Leftrightarrow \bar{r}_0 t_0 + r_0' \bar{t}_0 = 0 \\ &\Downarrow \text{逆行} \quad \text{共役} \quad \Downarrow \text{逆行} \\ r_0' \bar{t}_0' + \bar{r}_0 t_0' = 0 &\Leftrightarrow \bar{r}_0' t_0' + r_0 \bar{t}_0' = 0 \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

③⑧の4つの式を比較すれば、

$$|r_0'| = |r_0| \quad (40)$$

$$t_0 \bar{t}_0' = t_0' \bar{t}_0 \quad (41)$$

を得る。また、 $s_0 = t_0 t_0' - r_0 r_0'$  とおき、③⑧、③⑨式を用いれば、

$$|s_0| = 1 \quad (42)$$

$$\bar{r}_0 s_0 + r_0' = 0 \quad (43)$$

$$\bar{t}_0 s_0 - t_0 = 0 \quad (44)$$

と、④③、④④式に共役と逆行の操作を施した式が成り立つことがわかる。これらの関係式を用いて、

$|\rho|^2$  と  $|\rho'|^2$  を計算すれば、

$$|\rho|^2 = |\rho'|^2 = \frac{r^2 + |r_0|^2 + 2r \operatorname{Re}(r_0' e^{-i\alpha})}{1 + r^2 |r_0|^2 + 2r \operatorname{Re}(r_0' e^{-i\alpha})} \quad (45)$$

となり、 $|\tau|^2$  を計算すれば、

$$|\tau|^2 = |\tau'|^2 = \frac{1 - r^2 - |r_0|^2 + r^2 |r_0|^2}{1 + r^2 |r_0|^2 + 2r \operatorname{Re}(r_0' e^{-i\alpha})} \quad (46)$$

となる。これらより、

$$|\rho|^2 + |\tau|^2 = |\rho'|^2 + |\tau'|^2 = 1 \quad (47)$$

を得る。さらに、⑨式の  $(\bar{\rho}' \tau e^{i\gamma} + \rho \bar{\tau})$  に④⑤、④⑥、④⑦式を代入し、分数式の分子を変形すれば次のようになる。

$$\begin{aligned} &(r + \bar{r}_0' e^{i\alpha}) t_0 t' e^{-i\beta} e^{i\gamma} + (r_0 + s_0 r' e^{-i\alpha}) \bar{t}_0 t' e^{i\beta} \\ &= e^{i\beta} \{ (r + \bar{r}_0' e^{i\alpha}) t_0 t' e^{-i\alpha} + (r_0 + s_0 r' e^{-i\alpha}) \bar{t}_0 t' \} \quad (\because \text{④⑤}) \\ &= e^{i\beta} t' \{ r (t_0 - s_0 \bar{t}_0) e^{-i\alpha} + (\bar{r}_0' t_0 + r_0 \bar{t}_0) \} \quad (\because \text{④⑥}) \\ &= 0 \quad (\because \text{④④と③⑨}) \end{aligned}$$

これで、 $n_2 = -in_i$  のときには、 $F_D + F_S = 1$  となることが証明された。

最後に、 $n_2 = -in_i$  かつ  $d_3 \ll \lambda$  のとき、もし  $\varphi = 0$  になるとすれば、④⑧式より、 $\rho = \rho'$  でなければならない。この式に④⑤、④⑥式を代入し、 $d_3 \ll \lambda$  であるので  $\alpha = 0$  とおく。さらに、その分数式の分子に④②、④③、④④式または④⑥、④⑦、④⑧式とそれらの置換式を代入し、 $g, k_{1x}, k_{2x}, k_{3x}, n_1, n_2, n_3$  の間に成り立つ関係式を求めると、長い計算のあと、

$$\text{S 偏光では,} \quad g^2 k_{2x} (k_{1x} + k_{3x}) = 0$$

$$\text{P 偏光では,} \quad g^2 n_2^2 k_{2x} (n_3^2 k_{1x} + n_1^2 k_{3x}) = 0$$

を得る。上式左辺のどの因子も 0 ではないので、この関係式は成り立たない。したがって、 $\varphi = 0$

となることはない。

### §3 波連の短い光の場合

入射光の波連の長さが半透鏡のガラス板の厚さ以下であれば、干渉に対するガラス板内での多重反射の影響は無視することができる。この場合、干渉する2つの光の経路は図4のようになる。図1とは、補償板 C を挿入した点と光路長  $L_2$  の定義が異なっている。半透鏡のガラス板と補償板は、厚さと材質が同じである。光が半透鏡の金属層に空気側から入射するときの反射と透過による位相のずれを  $\delta_r$  ,  $\delta_t$  とし、ガラス側から入射する場合は  $\delta_r'$  ,  $\delta_t'$  とする。検出器 D に向かう2つの光の干渉条件は、整数を  $m$  として、

$$\left[ \Delta_D = \frac{4\pi}{\lambda} (L_1 - L_2) + (\delta_r - \delta_r') = \pi \left\{ \frac{2m}{2m+1} \right\} \text{ のとき } \left\{ \begin{array}{l} \text{強} \\ \text{弱} \end{array} \right\} \text{め合う} \right] \quad (48)$$

となり、光源 S に戻る2つの光の干渉条件は、

$$\left[ \Delta_S = \frac{4\pi}{\lambda} (L_1 - L_2) + (2\delta_r - \delta_t - \delta_t') = \pi \left\{ \frac{2m}{2m+1} \right\} \text{ のとき } \left\{ \begin{array}{l} \text{強} \\ \text{弱} \end{array} \right\} \text{め合う} \right] \quad (49)$$

となる。これら2つの位相差の差は、

$$\begin{aligned} \Delta_D - \Delta_S &= (\delta_t + \delta_t') - (\delta_r + \delta_r') \\ &= \text{Arg} \left( \frac{t_0 t_0'}{r_0 r_0'} \right) \end{aligned} \quad (50)$$

である。S 偏光の場合、(2), (3)式とそれらの置換式を代入すれば、

$$\frac{t_0 t_0'}{r_0 r_0'} = \frac{16 g^2 k_{3x} k_{2x}^2 k_{1x}}{(g^2 - 1)^2 (k_{3x}^2 - k_{2x}^2)(k_{1x}^2 - k_{2x}^2) - 4 g^2 (k_{3x} - k_{1x})^2 k_{2x}^2} \quad (51)$$

となり、P 偏光の場合、(6), (7)式とそれらの置換式を代入すれば、

$$\begin{aligned} &\frac{t_0 t_0'}{r_0 r_0'} \\ &= \frac{16 g^2 n_3^2 n_2^4 n_1^2 k_{3x} k_{2x}^2 k_{1x}}{(g^2 - 1)^2 (n_2^4 k_{3x}^2 - n_3^4 k_{2x}^2)(n_2^4 k_{1x}^2 - n_1^4 k_{2x}^2) - 4 g^2 (n_1^2 k_{3x} - n_3^2 k_{1x})^2 n_2^4 k_{2x}^2} \end{aligned} \quad (52)$$

となる。

ここで、 $n_2 = -i n_i$  を仮定すれば、 $n_2^4 > 0$  ,  $k_{2x}^2 < 0$  となり、他の変数はすべて正であるから、(5)式と(52)式の右辺はどちらも負の実数となる。したがって、(50)式より、

$$\Delta_D - \Delta_S = \pm \pi$$

が成り立つ。すなわち、検出器 D に向かう光が強(弱)め合うとき、光源 S に戻る光が弱(強)め合うことが証明された。以上の結果は文献2からの抜粋である。

最後に、 $n_2 = -i n_i$  を仮定すれば、(48)式の  $\delta_r - \delta_r'$  は 0 とはなりえないことがわかる。その証明の概要は以下の通りである。もし、

$$\delta_r - \delta_r' = \text{Arg} \left( \frac{r_0}{r_0'} \right) = 0$$

であれば、

$$p = \frac{r_0}{r_0'} \quad (53)$$

は正の実数でなければならない。(2)式または(6)式とその置換式を(53)式に代入すれば、

$$p = \bar{p} = \frac{1}{p} \quad \text{すなわち } p = 1$$

を得る。 $p = 1$  となるのは  $g^2 = -1$  のときであるが、この式は成り立たない。よって、 $\delta_r - \delta_r' = 0$

となることはない。

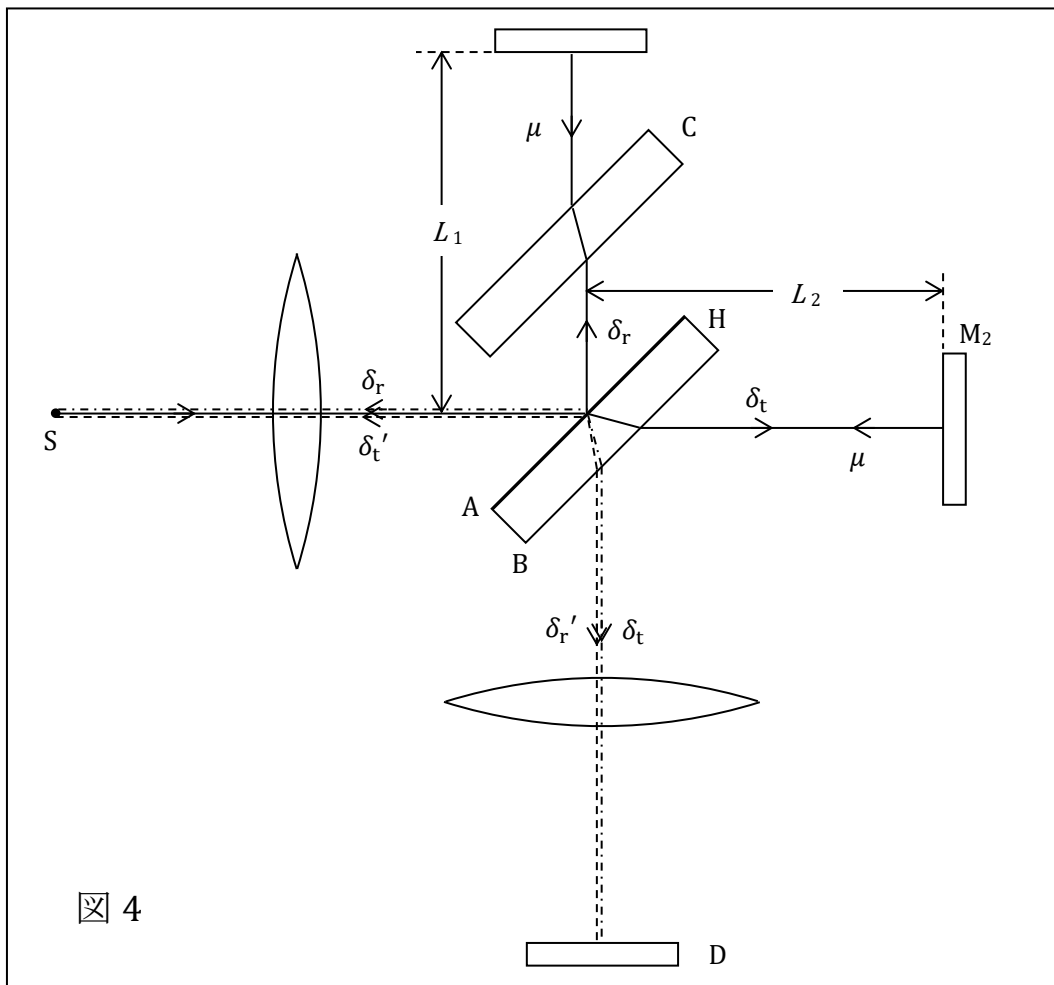


図 4

#### § 4 結論

マイケルソン干渉計において、半透鏡の金属層の屈折率が  $-in_i$  と表せる場合、すなわち、金属層でエネルギーの吸収がない場合、検出器での光の干渉条件は、

$$\left[ 2(L_2 - L_1) = \frac{\lambda}{2} \times \left\{ \begin{matrix} 2m \\ 2m+1 \end{matrix} \right\} \right] \text{ のとき } \left\{ \begin{matrix} \text{強} \\ \text{弱} \end{matrix} \right\} \text{ め合う}$$

ではない。正しい干渉条件は、レーザー光のように波連の長い光では⑬式、波連の短い光では⑭式である。このような式は高校物理の範囲外であるから、大学入試問題を作成するときには注意しなければならない。

#### 参考文献

- 1) 斉藤全弘 : マッハ・ツェンダー干渉計での干渉条件 (2)
- 2) 斉藤全弘 : マイケルソン干渉計における光波の干渉, 駿台フォーラム 第 21 号(2003)p.95.

「熱中物理」に掲載されている論文の要約

は [こちらへ](#)