

§1 金属層での反射と透過

前稿(文献1)では代用半透鏡を用いたマッハ・ツェンダー干渉計での光波の干渉について論じた。本稿では真正半透鏡を用いた場合を考察する。その準備として、真正半透鏡の金属層による振幅反射率と振幅透過率および位相のずれを計算するための公式を導出する。なお、§1の内容は文献2の部分的抜粋である。

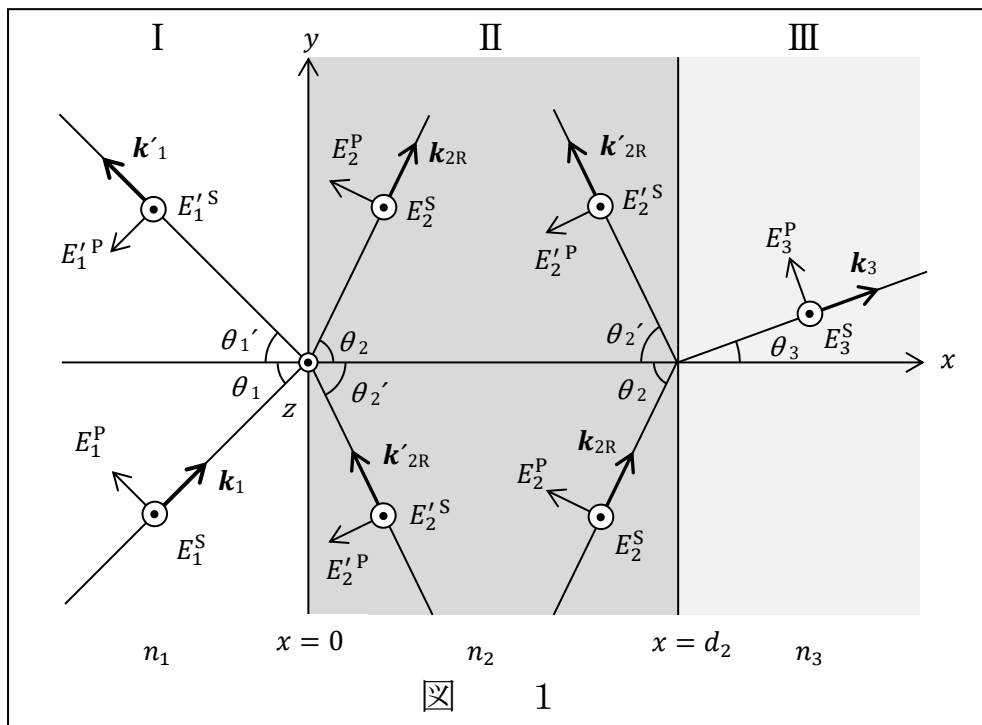


図1のIは空気、IIは厚さ $d_2$ の金属層、IIIはガラス板である。それぞれの屈折率を $n_1$  ( $=1$ ),  $n_2, n_3$ とする。IとIIの境界面に入射角 $\theta_1$ で入射した波長 $\lambda$ の平面波の一部は反射角 $\theta'_1$ で反射し、残りは屈折角 $\theta_2$ で屈折する。その屈折波はIIとIIIの境界面に入射角 $\theta_2$ で入射し、一部は屈折角 $\theta_3$ でIIIへ屈折し、残りは反射角 $\theta'_2$ で反射する。その反射波の一部はIとIIの境界面で反射し、残りはIへ屈折する。以下同様のことが繰り返され、IIでは $\theta_2$ 方向と $\theta'_2$ 方向に伝わる無数の光波が重なっている。

図1のように、座標軸 $(x, y, z)$ を設定し、太い矢印の向きに伝わる入射波および合成波の波数ベクトルを $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}'_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}'_2, \mathbf{k}_3$ とする。添字のRは実部を表す。S偏光とP偏光の複素表示による電場成分は、角振動数を $\omega$ として、

$$\begin{pmatrix} E_j^S \\ E_j^P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_j^S \\ A_j^P \end{pmatrix} \exp(i[\omega t - k_{jx}x - k_{jy}y]) \quad (j=1, 2)$$

$$\begin{pmatrix} E_j'^S \\ E_j'^P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_j'^S \\ A_j'^P \end{pmatrix} \exp(i[\omega t - k'_{jx} x - k'_{jy} y]) \quad (j=1, 2)$$

$$\begin{pmatrix} E_3^S \\ E_3^P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_3^S \\ A_3^P \end{pmatrix} \exp(i[\omega t - k_{3x}(x - d_2) - k_{3y} y])$$

と表される。境界面  $x = 0$  と  $x = d_2$  での電磁場に対する境界条件より、金属層による振幅反射率  $r_0$  と振幅透過率  $t_0$  は、

S 偏光の場合、

$$r_0 = \frac{A_1'^S}{A_1^S} = \frac{g^2(k_{2x} - k_{3x})(k_{1x} + k_{2x}) + (k_{2x} + k_{3x})(k_{1x} - k_{2x})}{g^2(k_{2x} - k_{3x})(k_{1x} - k_{2x}) + (k_{2x} + k_{3x})(k_{1x} + k_{2x})} \quad (1)$$

$$t_0 = \frac{A_3^S}{A_1^S} = \frac{4gk_{1x}k_{2x}}{g^2(k_{2x} - k_{3x})(k_{1x} - k_{2x}) + (k_{2x} + k_{3x})(k_{1x} + k_{2x})} \quad (2)$$

P 偏光の場合、

$$r_0 = \frac{A_1'^P}{A_1^P} = \frac{g^2(n_3^2 k_{2x} - n_2^2 k_{3x})(n_2^2 k_{1x} + n_1^2 k_{2x}) + (n_3^2 k_{2x} + n_2^2 k_{3x})(n_2^2 k_{1x} - n_1^2 k_{2x})}{g^2(n_3^2 k_{2x} - n_2^2 k_{3x})(n_2^2 k_{1x} - n_1^2 k_{2x}) + (n_3^2 k_{2x} + n_2^2 k_{3x})(n_2^2 k_{1x} + n_1^2 k_{2x})} \quad (3)$$

$$t_0 = \frac{A_3^P}{A_1^P} = \frac{4gn_1 n_2^2 n_3 k_{1x} k_{2x}}{g^2(n_3^2 k_{2x} - n_2^2 k_{3x})(n_2^2 k_{1x} - n_1^2 k_{2x}) + (n_3^2 k_{2x} + n_2^2 k_{3x})(n_2^2 k_{1x} + n_1^2 k_{2x})} \quad (4)$$

となることがわかる。ただし、

$$\left. \begin{aligned} g &= \exp(-i k_{2x} d_2) \\ k_{1x} &= k_1 \cos \theta_1 = -k'_{1x} \\ k_{2x} &= k_1 \sqrt{n_2^2 - \sin^2 \theta_1} = -k'_{2x} \\ k_{3x} &= k_1 \sqrt{n_3^2 - \sin^2 \theta_1} \\ k_{1y} &= k_1 \sin \theta_1 = k'_{1y} = k_{2y} = k'_{2y} = k_{3y} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

である。さらに、(5)式より、反射の法則  $\theta'_1 = \theta_1$ 、 $\theta'_2 = \theta_2$  と屈折の法則  $n_1 \sin \theta_1 = n_3 \sin \theta_3$  を得る。エネルギー反射率  $R_0$  とエネルギー透過率  $T_0$ 、および入射波に対する反射波と透過波の位相のずれ  $\delta_r$  と  $\delta_t$  は、

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= |r_0|^2, \quad T_0 = |t_0|^2 \frac{k_{3x}}{k_{1x}} \\ \delta_r &= \text{Arg}(r_0), \quad \delta_t = \text{Arg}(t_0) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

から求めることができる。

蒸着する金属を銀として、その複素屈折率を理論的に計算すれば、可視領域で、

$$\begin{aligned} n_2 &= n_R - i n_i \\ n_i &= 2 \text{ (紫)} \sim 5 \text{ (赤)}, \quad n_R < 0.01 \times n_i \end{aligned}$$

となる。以下では、簡単のために、 $n_2 = -i n_i$  とする。この場合、入射波は金属層の表面で全反射することになるが、金属層内には  $y$  軸の正の向きに進行するエバネッセント波が存在し、それがガラス板に漏れ出し、透過波になると考える。あるいは、粒子の観点に立てば、光子がトンネル効

果によって空気側からガラス側へ透過すると考えることもできる。

マツハ・ツェンダー干渉計では、 $\theta_1 = 45^\circ$  であり、 $n_3 = 1.6$  とすれば、(5)式より、

$$\left. \begin{aligned} k_{1x} &= k_{1y} = \frac{k_1}{\sqrt{2}} \\ k_{2x} &= -i k_1 \sqrt{n_i^2 + 0.5} \\ k_{3x} &= k_1 \sqrt{1.6^2 - 0.5} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

となる。また、 $\theta_3 = 26.23^\circ$  である。(7)式を(1)式～(4)式と(6)式に代入すれば、振幅とエネルギーの反射率と透過率および位相のずれが、 $n_i$  と  $g$  の関数として求まる。具体例として、 $n_i = 2$  (紫)と $n_i = 5$  (赤)の 2 つの場合を考え、それぞれの場合について、 $g$  に適当な値 ( $0 < g < 1$ ) を代入して  $R_0$  と  $T_0$  を計算し、半透鏡の条件  $R_0 = T_0 = 0.5$  を満たす  $g$  の値  $g_0$  を探す。 $g_0$  がわかれば、(5)式の最初の式を用いて、

$$d_2 = - \frac{\log g_0}{2\pi \sqrt{n_i^2 + 0.5}} \lambda$$

から金属層の厚さ  $d_2$  を計算することができる。このようにして求めた  $g_0$  と  $d_2 / \lambda$ 、およびそのときの  $r_0$ 、 $t_0$ 、 $\delta_r$ 、 $\delta_t$  の値を S 偏光と P 偏光に分けて表1に与えてある。 $r_0'$ 、 $t_0'$ 、 $\delta_r'$ 、 $\delta_t'$  の欄は、光波が逆行する場合、すなわち、ガラス板から金属層へ入射角  $\theta_3 = 26.23^\circ$  で入射した光波の一部が反射角  $\theta_3$  で反射し、残りが屈折角  $\theta_1 = 45^\circ$  で空气中へ透過する場合の値である。これらの結果が示すように、金属層の厚さ  $d_2$  は、 $n_i$  が 2 程度(紫)のとき波長の 5～6%で、 $n_i$  が 5 程度(赤)のとき波長の 1～2%でなければならない。そして、反射するときの位相のずれは  $\pi$  でもなければ  $\pi / 2$  でもないし、透過するときには位相がずれることに注意しなければならない。

表1 半透鏡の金属層による振幅反射率と振幅透過率、  
および反射と透過に伴う位相のずれ

$n_i$	S 偏光		P 偏光	
	2	5	2	5
$g_0$	0.5224	0.7065	0.4224	0.5778
$d_2 / \lambda$	0.04871	0.01095	0.06465	0.01729
$r_0$	-0.5399+0.4566i	-0.6101+0.3574i	0.1966-0.6792i	0.4774-0.5217i
$t_0$	0.4546+0.1991i	0.3959+0.2993i	0.4928+0.05886i	0.4078+0.2829i
$\delta_r$ [rad]	2.4396	2.6116	-1.2890	-0.8297
$\delta_t$ [rad]	0.4128	0.6473	0.1189	0.6064
$r_0'$	0.03045+0.7065i	-0.1776+0.6844i	-0.03115-0.7064i	0.3214-0.6299i
$t_0'$	0.9228+0.4042i	0.8036+0.6075i	1.000+0.1195i	0.8278+0.5742i
$\delta_r'$ [rad]	1.5277	1.8246	-1.6149	-1.0990
$\delta_t'$ [rad]	0.4128	0.6473	0.1189	0.6064

## §2 真正半透鏡での反射と透過

前稿(文献1)では代用半透鏡(ガラス板)による振幅反射率  $\rho$  と振幅透過率  $\tau$  を求めた。それと同じ方法で真正半透鏡による  $\rho$  と  $\tau$  を求める。図2のように、波長  $\lambda$  の平面波が金属層の P 点に入射角  $\theta_1$  で入射し、その一部が振幅反射率  $r_0$  で反射し、残りが振幅透過率  $t_0$  でガラス板へ透過する。透過した光波は空気との境界面の Q 点に入射して、その一部が振幅透過率  $t'$  で空气中へ透過し、残りが振幅反射率  $r'$  で反射する。その反射した光波は金属層との境界面に入射して、その一部が振幅透過率  $t_0'$  で空气中へ透過し、残りが振幅反射率  $r_0'$  で反射する。以下同様のことが繰り返される。多重反射して半透鏡から出て来た無数の光波は遠くの観測点  $O_R$  と  $O_T$  で重なる。P 点での入射波の複素振幅を  $A_0$ 、 $O_R$  点と  $O_T$  点での合成波の複素振幅を  $A_R$ 、 $A_T$  とすると、

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{A_R e^{ikL_R}}{A_0} = r_0 + t_0 r' t_0' e^{-i\alpha} + t_0 r' r_0' r' t_0' e^{-2i\alpha} + \dots \\ &= \frac{r_0 + (t_0 t_0' - r_0 r_0') r' e^{-i\alpha}}{1 - r_0' r' e^{-i\alpha}}\end{aligned}\quad (8)$$

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{A_T e^{ikL_T}}{A_0} = \{t_0 t' + t_0 r' r_0' t' e^{-i\alpha} + t_0 (r' r_0')^2 t' e^{-2i\alpha} + \dots\} e^{-i\beta} \\ &= \frac{t_0 t' e^{-i\beta}}{1 - r_0' r' e^{-i\alpha}}\end{aligned}\quad (9)$$

となる。ただし、 $\alpha$  は隣り合う経路の光路差による位相差で、 $\beta$  は屈折波の P 点と Q 点での位相の差である。ガラス板の厚さを  $d$  とすれば、

$$\alpha = \frac{4\pi d}{\lambda} \sqrt{n_3^2 - \sin^2 \theta_1}, \quad \beta = \frac{2\pi d}{\lambda} \frac{n_3^2}{\sqrt{n_3^2 - \sin^2 \theta_1}}$$

と表される。図3のように、裏側から入射する場合は、空气中からガラス板へ入射する光波の振幅反射率を  $r$ 、振幅透過率を  $t$  として、

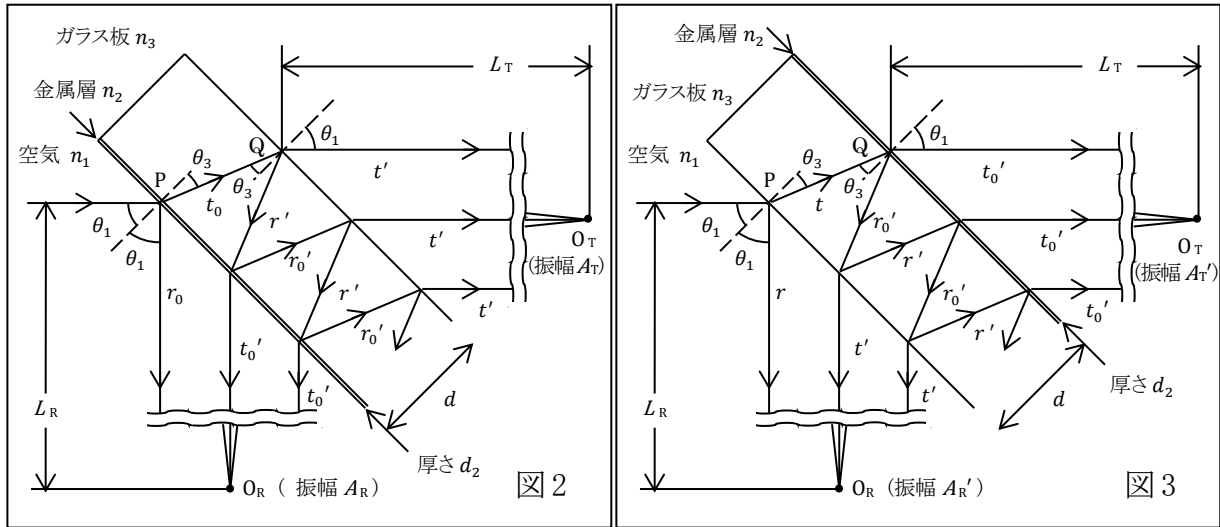
$$\begin{aligned}\rho' &= \frac{A'_R e^{ikL_R}}{A_0} = r + t r_0' t' e^{-i\alpha} + t r_0' r' r_0' t' e^{-2i\alpha} + \dots \\ &= \frac{r + r_0' t' e^{-i\alpha}}{1 - r_0' r' e^{-i\alpha}}\end{aligned}\quad (10)$$

$$\begin{aligned}\tau' &= \frac{A'_T e^{ikL_T}}{A_0} = \{t t_0' + t r_0' r' t_0' e^{-i\alpha} + t (r_0' r')^2 t_0' e^{-2i\alpha} + \dots\} e^{-i\beta} \\ &= \frac{t t_0' e^{-i\beta}}{1 - r_0' r' e^{-i\alpha}} = \tau\end{aligned}\quad (11)$$

となる。ただし、式の変形に際して、恒等式  $t t' - r r' = 1$  と  $t t_0' = t_0 t'$  を用いた。(8)式～(11)式は、 $n_2 = -i n_1$  のとき、次のエネルギー保存則を満たす。

$$|\rho|^2 + |\tau|^2 = 1, \quad |\rho'|^2 + |\tau'|^2 = 1$$

その証明は長い計算を要するので省略する。



### §3 マッハ・ツェンダー干渉計

図4はマッハ・ツェンダー干渉計の模式図で、 $H_1$  と  $H_2$  は同一の真正半透鏡、 $M_1$  と  $M_2$  は同じ金属で作られた全反射鏡である。2つの半透鏡のどちらの面に金属が蒸着してあるかによって、4つの組み合わせが考えられるが、どの組み合わせでも計算の仕方は同じであるので、ここでは面 A と面 D に金属を蒸着してある場合について計算する。光源 S を出た波長  $\lambda$  の光が、複素振幅  $A_0$  の平面波となって半透鏡  $H_1$  に入射角  $\theta_1 = 45^\circ$  で入射し、半透鏡内での多重反射を経て、遠くにある観測点  $O_1$  と  $O_2$  に達したとする。  $O_1$  と  $O_2$  で重なった合成波の複素振幅は、 $M_1$  を通る経路と  $M_2$  を通る経路に分けて計算すれば、それぞれ、

$$\begin{aligned}
 A_1 &= A(\text{下右右}) + A(\text{右下右}) \\
 &= (A_0 \rho \tau' + A_0 \tau \rho) e^{-i\delta_1} \\
 &= A_0 \frac{\{r_0 + (t_0 t_0' - r_0 r_0') r' e^{-i\alpha}\} (t t_0' + t_0 t')}{(1 - r_0' r' e^{-i\alpha})^2} e^{-i(\beta + \delta_1)} \\
 A_2 &= A(\text{下右下}) + A(\text{右下下}) \\
 &= (A_0 \rho \rho' + A_0 \tau \tau e^{i\gamma}) e^{-i\delta_2} \\
 &= A_0 \frac{\{r_0 + (t_0 t_0' - r_0 r_0') r' e^{-i\alpha}\} (r + r_0' e^{-i\alpha}) + (t_0 t')^2 e^{-i\alpha}}{(1 - r_0' r' e^{-i\alpha})^2} e^{-i\delta_2}
 \end{aligned}$$

となる。ただし、 $\delta_1 = k_1(a + b + L_1) + \mu$ 、 $\delta_2 = k_1(a + b + L_2) + \mu$  で、 $\mu$  は全反射鏡で反射するときの位相の遅れである。また、図4の cd 間の距離を  $c$  として、

$$\gamma = k_1 c = \frac{4\pi d}{\lambda} \frac{\sin^2 \theta_1}{\sqrt{n_3^2 - \sin^2 \theta_1}}$$

であり、式の変形に際して、 $\alpha = 2\beta - \gamma$  を用いた。 $r$ 、 $r'$ 、 $t$ 、 $t'$  の間には次の関係式が成り立つ。

$$r' = -r, \quad t t' = 1 - r^2$$

観測点  $O_1$  と  $O_2$  へ向かうエネルギーの割合は、

$$F_1 = \left| \frac{A_1}{A_0} \right|^2, \quad F_2 = \left| \frac{A_2}{A_0} \right|^2$$

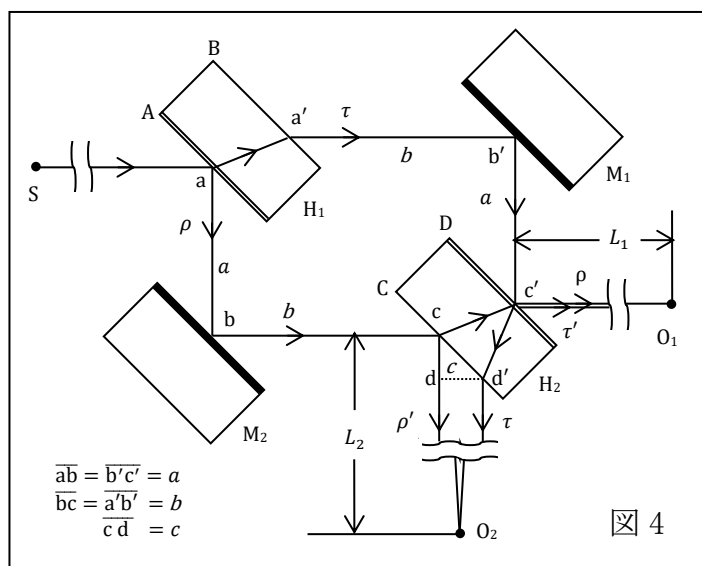
で、蒸着した金属の複素屈折率が  $n_2 = -i n_i$  と表されるとき、次のエネルギー保存則を満たす。

$$F_1 + F_2 = 1 \quad (12)$$

さらに、 $H_1$  と  $M_2$  の間に、位相差  $\pi$  だけを作り、他になんの変化ももたらさない理想的なセルを挿入すれば、

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 1 \quad (13)$$

となり、 $O_1$  では暗くなるが、 $O_2$  では明るくなる。これらの結果は代用半透鏡を用いた場合と同じである。(12)式と(13)式の証明も長い計算を要するので省略する。



#### §4 半透鏡での位相のずれ

図5のようなマイケルソン干渉計において、半透鏡 H のガラス板の厚さを光の波長に比べて充分小さくすると同時に、補償板 C を取り去り、ガラス板の面 B での反射を無視するという状況設定で、検出器 D での干渉を考える。大学入試問題はこのような状況設定のもとに作られている。第4回懸賞問題と同様に、「全反射鏡と半透鏡の金属層 A での反射では位相が  $\pi$  だけずれ、金属層を透過するときには位相がずれない」と仮定すると、次のような矛盾が生じる。光の波長を  $\lambda$ 、整数を  $m$  とすれば、

$$2(L_2 - L_1) = \frac{\lambda}{2} (2m + 1)$$

のとき、検出器 D に向かう光と光源 S に戻る光はどちらも暗くなり、エネルギー保存則に反する。明らかにこの仮定は間違っているのである。ところが、半透鏡での反射による位相のずれは  $\pi$  であると明記している辞典や上記の仮定を想定している教科書があり(文献3)、大学入試問題でもそれを明記しているものや、明記はしていないが暗黙のうちに認めているものが多数ある(文献4)。

空気と金属層の境界面で反射するときには位相が  $\pi$  だけずれ、ガラスと金属層の境界面で反射するときにはずれないとすると、この矛盾は回避できる。実際そのように記述している教科書がある

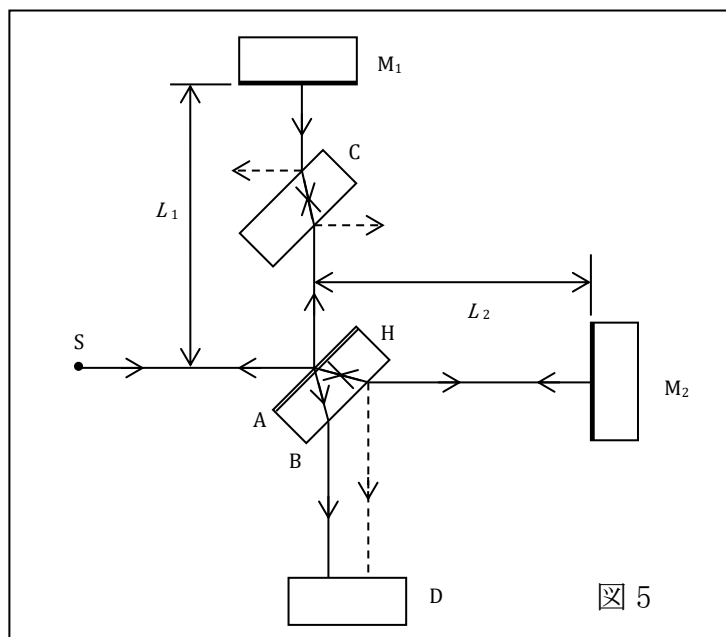
が、その理由は説明されていない(文献5)。

また、第4回懸賞問題に対する霜田光一氏の回答では、半透鏡で反射した光は透過した光に比べて位相が  $\pi/2$  だけずれることが証明されており、一般啓蒙書でもそれに従う記述が見られるようになった(文献6)。しかし、この証明は半透鏡の対称性に基づいているので、反射波と透過波の位相差が  $\pi/2$  となるのは特殊な半透鏡に限定される。真正半透鏡は非対称なので、この証明は適用されない。真正半透鏡の場合、エネルギー保存則や半透鏡の定義(エネルギー反射率 = エネルギー透過率)といった積分量を用いるだけで、反射や透過による位相のずれを導出することはできない。光の逆行可能性を用いても、せいぜい位相のずれに対する必要条件が出てくるだけである。

位相のずれは表面の物理、具体的には電磁場に対する境界条件、から導かれる。§1の具体例で示したように、平面波が半透鏡の金属層で反射するときの位相のずれは  $\pi$  でもなければ  $\pi/2$  でもないし、透過するときには位相がずれる。これらのずれは、金属層の厚さと屈折率、ガラス板の屈折率、および光の入射角に依存し、その依存関係は偏光によって異なる。それを用いれば、金属層の複素屈折率が  $-in_i$  と表される場合、検出器で暗くなるときには光源に戻る光が明るくなるということが証明できる(文献2)。

マイケルソン干渉計でも、補償板内と半透鏡のガラス板内での多重反射やガラス板の表面での反射を考慮に入れて、検出器での干渉条件を求めることは可能であるが、これについては別の機会に報告する。

筆者が高校生のとき、「光波が鏡の表面で反射するときの位相のずれは  $\pi$  である」と教わったように記憶する。もしかしたら、我が国では世代を超えて、間違ったことが教えられてきたのではないだろうか。マイケルソンがノーベル賞を受賞して百年有余、間違いの連鎖は断ち切らなければならない。



#### 参考文献

- 1) 齊藤全弘 : マッハ・ツェンダー干渉計での干渉条件(1)
- 2) 齊藤全弘 : マイケルソン干渉計における光波の干渉, 駿台フォーラム第21号(2003)p.95.
- 3) 「物理学辞典」p.2029, 培風館(1992).  
石黒浩三 : 光学(基礎物理学選書 23)p.91, 裳華房(1982).  
これらはたまたま筆者の身の回りにある書籍から見つけ出したもので, 系統的な検索はしていない。
- 4) 明記してあるもの : 京都産業大学(1987), 甲南大学(2003), 大阪大学(2010 後期).  
明記していないもの : 早稲田大学(1988), 東京学芸大学(1993), 大阪大学(1994),  
九州大学(2004), 東京大学(2007 後期), 熊本大学(2010).  
これらは「全国大学入試問題正解」旺文社(1987~2010)から見つけ出したもので, 同書に掲載されていない大学や 1986 年以前の入試問題を調査すれば, もっと見つかるに違いない。
- 5) 田村松平, 湯川秀樹 : 物理学通論(中巻)p.146, 大明堂(1961).
- 6) 霜田光一 : ハーフミラーにおける光の消滅と生成, パリティ 7, No 1, 73(1992).  
竹内繁樹 : 量子コンピュータ(ブルーボックス B1469)p.66, 講談社(2005).

「熱中物理」に掲載されている論文の要約

は [こちらへ](#)