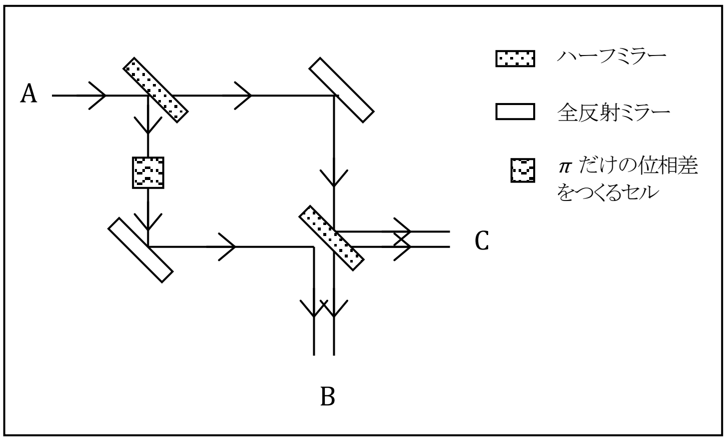
マッハ・ツェンダー干渉計での干渉条件（1）

～第４回『パリティ』懸賞問題の厳密解～

斉藤　全弘

第4回『パリティ』懸賞問題［吉田節生：どこへ消えた？レーザー光，パリティ 6, No.4, 71(1991)］

図のＡからレーザー光の平面波を入射させる。「レーザー光は全反射ミラーおよびハーフミラーの表面で反射するときは位相がπずれ，ハーフミラーを透過したときは位相のずれはない」とすれば，ＢとＣで２つの光波が打ち消しあい，Ａから入射した光のエネルギーが消えてなくなる。エネルギーはどこに行ったのか，という問題です。後半部分の問題は省略しました。



§１　出題者への回答

この懸賞問題にはいくつかの不備な点と間違った記述がありますので，理論計算によって正しい結論を導くためには，問題を再構成する必要があります。第1に，光学系の配置があいまいですので，以下の図3のような対称性をもつ配置に限定することにします。第2に，ハーフミラーとしてどのようなものを想定しているのか明確でありません。通常，ハーフミラーとはガラス板の片面に金属を薄く蒸着したものを指すと思うのですが，懸賞問題のように，両面に金属を蒸着してあるかのような図を書く人もいます。本稿では片面に金属を蒸着したものを真正半透鏡と呼ぶことにします。また，入手が困難なためか，金属を蒸着していないガラス板をハーフミラーとして用いる人もいます。ここではこれを代用半透鏡と呼ぶことにします。第3に，「π だけの位相差をつくるセル」とはどのような構造をもつものなのか説明がありません。これについてはあとで論じることにします。第4に，光源としてレーザーの平面波を想定していますが，偏光についての言及がありません。干渉条件は偏光に依存しますので，無視することはできません。以下の計算では，単色光の平面波でＳ偏光とＰ偏光の2つの場合を考察します。最後に，「レーザー光は全反射ミラーおよびハーフミラーの表面で反射するときは位相が π ずれ，ハーフミラーを透過したときは位相のずれはないとします」とありますが，これはどちらも間違っています。全反射ミラーでの反射による位相のずれは π ではありません（注1）。真正半透鏡での反射による位相のずれは π でもなければ$\pi/2$ でもありません。真正半透鏡を透過するとき位相はずれます（文献2）。これらのずれは，金属層の厚さと屈折率，ガラス板の屈折率，および光の入射角に依存します。さらに，その依存関係は偏光によって異なります。

これらの点をすべて考慮して，懸賞問題の B と C での光の強さを計算すれば，エネルギー保存則を満たす解が求まります。「π だけの位相差をつくるセル」ではなく，「位相差 π だけをつくり，他になんの変化ももたらさない理想的なセル」を経路に挿入すれば，C で暗くなりますが，B では明るくなります。エネルギー保存則は満たされており，矛盾はありません。

§2　ガラス板での反射と透過

図1のように，屈折率 $n_1(=1)$ の空気中にある厚さ d，屈折率 n_2 のガラス板に，波長 λ の光の平面波が入射角 θ_1 で入射する場合を考える。表面 $\mathrm{S_R}$ での振幅反射率を r，振幅透過率を t とし，屈折角 θ_2 で屈折した光の裏面 $\mathrm{S_T}$ での振幅反射率を r'，振幅透過率を t' とする。表面 $\mathrm{S_R}$ で反射した光 $\mathrm{R_1}$ とガラス板内で多重反射したあと $\mathrm{S_R}$ から出ていく光 $\mathrm{R}_i (i=2,3,\cdots)$ は遠方の点 $\mathrm{O_R}$ で重なる。同様に，ガラス板を透過した光 $\mathrm{T_1}$ とガラス板内で多重反射したあと $\mathrm{S_T}$ から出ていく光 $\mathrm{T}_i\ (i=2,3,\cdots)$ は遠方の点 $\mathrm{O_T}$ で重なる。 r, r', t, t' の間には，

$$r' = -r \qquad\qquad t\,t' = 1 - r^2$$

の関係があり，r はフレネルの式より，

$$\text{S偏光の場合}\ ：\ r = -\frac{\sin(\theta_1-\theta_2)}{\sin(\theta_1+\theta_2)} \qquad \text{（注2）}$$

$$\text{P偏光の場合}\ ：\ r = \frac{\tan(\theta_1-\theta_2)}{\tan(\theta_1+\theta_2)} \qquad \text{（注3）}$$

で与えられる。反射光 R_{i+1} の R_i に対する光路差による位相のずれと，透過光 T_{i+1} の T_i に対する光路差による位相のずれは等しく，

$$\alpha = \frac{4\pi d}{\lambda}\ n_2 \cos\theta_2 = \frac{4\pi d}{\lambda}\ \sqrt{n_2^2 - \sin^2\theta_1} \qquad (1)$$

と表される。P 点での入射波の複素振幅を A_0 とすれば，観測点 $\mathrm{O_R}$ での合成波の複素振幅 A_R は，

$$A_\mathrm{R} = A_0 \left(r + t\,r'\,t'\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} + t\,r'^3\,t'\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\alpha} + \cdots\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kL_\mathrm{R}}$$

$$= A_0\ \frac{r\ (1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha})}{1-r^2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kL_\mathrm{R}} \qquad (2)$$

となる。ただし，$k = 2\pi/\lambda$ ，$L_\mathrm{R} = \overline{\mathrm{PO_R}}$ である。エネルギー反射率 R は，

$$R = \left|\frac{A_\mathrm{R}}{A_0}\right|^2 = \frac{2\,r^2(1-\cos\alpha)}{1-2\,r^2\cos\alpha + r^4}$$

と表される。同様に，観測点 $\mathrm{O_T}$ での合成波の複素振幅 A_T は，

$$A_\mathrm{T} = A_0\left(t\,t' + t\,r'^2\ t'\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} + t\,r'^4\,t'\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\alpha} + \cdots\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\beta + kL_\mathrm{T})}$$

$$= A_0\ \frac{1-r^2}{1-r^2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\beta+kL_\mathrm{T})} \qquad (3)$$

となる。ただし，$\beta = kn_2\overline{\mathrm{PQ}}$ ，$L_\mathrm{T} = \overline{\mathrm{QO_T}}$ である。エネルギー透過率は，

$$T = \left|\frac{A_\mathrm{T}}{A_0}\right|^2 = \frac{(1-r^2)^2}{1-2\,r^2\ \cos\alpha + r^4}$$

と表される。R と T の間には，次のエネルギー保存則が成り立つ。

$$R + T = 1$$

これらの結果は次のように解釈することもできる。図2に示すように，遠方にある光源 S を出た光が平面波となってガラス板に入射角 θ_1 で入射するとき，ガラス板内で多重反射した無数の光が P 点で重なって観測点 $\mathrm{O_R}$ に向かう合成波の P点での複素振幅は $A_\mathrm{R}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kL_\mathrm{R}}$ であり，Q 点で重なって観測点 $\mathrm{O_T}$ に向かう合成波の Q 点での複素振幅は $A_\mathrm{T}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kL_\mathrm{T}}$ である。このとき，ガラス板による振幅反射率 ρ と振幅透過率 τ を次式で定義する。

$$\rho = \frac{A_{\mathrm{R}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kL_{\mathrm{R}}}}{A_0} = \frac{r\ \left(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\right)}{1-r^{\,2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}} \tag{4}$$

$$\tau = \frac{A_{\mathrm{T}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kL_{\mathrm{T}}}}{A_0} = \frac{(1-r^{\,2})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}}{1-r^{\,2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}} \tag{5}$$

これらと同等な式は光学の教科書など（文献3，4）に載っており，目新しいものではない。

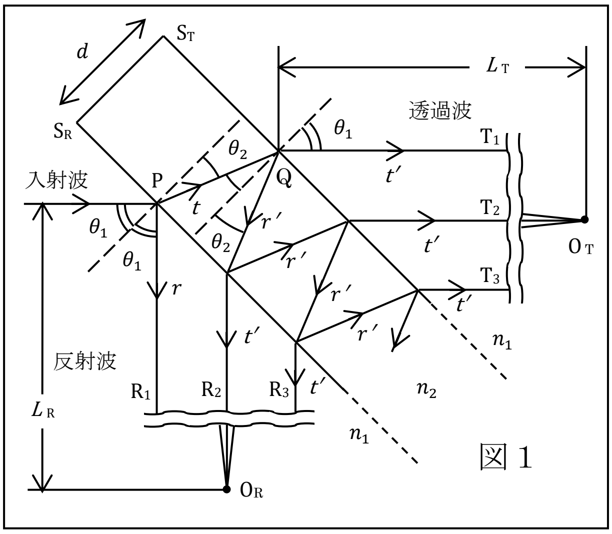


図１

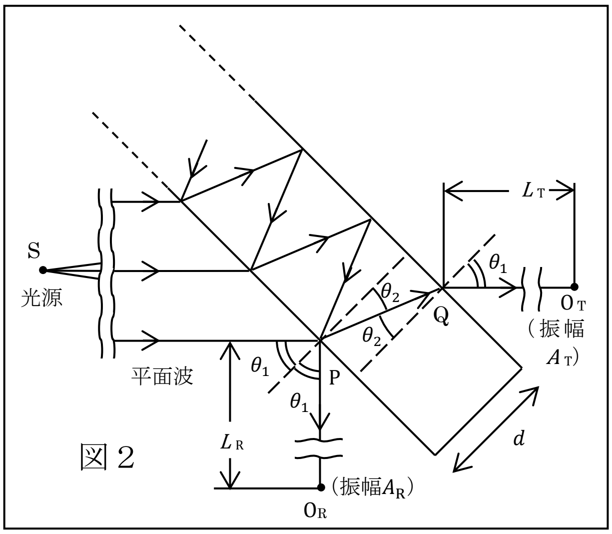


図２

§３ 代用半透鏡を用いたマッハ・ツェンダー干渉計

図3はマッハ・ツェンダー干渉計の模式図で，H_1 と H_2 は厚さ d，屈折率 n_2のガラス板(代用半透鏡)，M_1と M_2は同じ金属で作られた全反射鏡である。いま，遠方にある光源 S を出た波長 λ の光が複素振幅 A_0の平面波となって，ガラス板 H_1に入射角$\theta_1 = 45°$ で入射する場合を考える。4つの経路 $\mathrm{Sabcc'O_1}$, $\mathrm{Saa'b'c'O_1}$, $\mathrm{SabcO_2}$, $\mathrm{Saa'b'c'd'O_2}$ に沿って観測点 O_1 または O_2に伝わった光を経路ごとに重ね合わせた合成波の複素振幅を，それぞれ，A(下右右)，A(右下右)，A(下右下)，A(右下下)とする。(4) と (5) を用いれば，

$$A(\text{下右右}) = A_0\,\rho\,\tau\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta_1} = A_0\ \frac{r\,(1-r^{\,2})\left(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\right)}{\left(1-r^{\,2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\right)^2}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\beta+\delta_1)}$$

$$A(\text{右下右}) = A_0\,\tau\,\rho\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta_1} = A(\text{下右右})$$

$$A(\text{下右下}) = A_0\,\rho\,\rho\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta_2} = A_0\ \frac{r^{\,2}\left(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\right)^2}{\left(1-r^{\,2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\right)^2}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta_2}$$

$$A(\text{右下下}) = A_0\,\tau\,\tau\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\gamma-\delta_2)} = A_0\ \frac{(1-r^{\,2})^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}{\left(1-r^{\,2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\right)^2}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta_2}$$

であることがわかる。ただし，$\delta_1 = k(a+b+L_1)+\mu$, $\delta_2 = k(a+b+L_2)+\mu$ で，μ は全反射鏡での反射による位相のずれである。また，$\gamma = kc$ であり，$\alpha = 2\beta-\gamma$ であることを用いた。 よって，観測点 O_1と O_2での実際の複素振幅は，それぞれ，

$$A_1 = A(\text{下右右}) + A(\text{右下右})$$

$$= A_0\ \frac{2\,r\,(1-r^2)\left(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\right)}{\left(1-r^{\,2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\right)^2}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\beta+\delta_1)} \tag{6}$$

$$A_2 = A(\text{下右下}) + A(\text{右下下})$$
$$= A_0 \ \frac{r^2 + (1-4r^2+r^4)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} + r^2 \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\alpha}}{\left(1-r^2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\right)^2} \ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta_2} \tag{7}$$

となる。また，ガラス板H_1に入射した光のエネルギーのうち，O_1 とO_2 へ向かうエネルギーの割合は，それぞれ，

$$F_1 = \left| \frac{A_1}{A_0} \right|^2 = \frac{8r^2(1-r^2)^2(1-\cos\alpha)}{(1-2r^2\cos\alpha+r^4)^2} \tag{8}$$

$$F_2 = \left| \frac{A_2}{A_0} \right|^2 = \frac{(1-8r^2+18r^4-8r^6+r^8)+4r^2(1-4r^2+r^4)\cos\alpha+4r^4\cos^2\alpha}{(1-2r^2\cos\alpha+r^4)^2} \tag{9}$$

となる。F_1 とF_2 は次のエネルギー保存則を満たす。

$$F_1 + F_2 = 1$$

上記の計算では，ガラス板内で多重反射した光をひとまとめにして処理しているが，光源 S から観測点 O_1または O_2に至るすべての伝播経路を個別に扱って計算してもよい。具体的には，まず各経路に沿って位相の変化を加え合わせて虚数単位 i を掛け(iδ)，その指数関数値 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}$ を求める。それに反射や透過による振幅の変化率(r ,r',t , t') を掛け合わせて，観測点での複素振幅を求める。最後に，それらをすべての経路について足し合わせる。一言で言えば，ファインマンの経路積分と同じ考え方で計算するのである。ファインマンの経路積分と異なるのは，あらゆる経路について積分するのではなく，古典物理で許される経路についてのみ積分する点と，各経路に対する「位相$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}$」には r で表される重みがついている点である。その計算はここに収録するには長すぎるし，実質的には(6)，(7) の A_1，A_2 を求める計算と同じであるから省略する。もちろん，その計算の最終結果は(8)，(9) の F_1，F_2 と一致する。

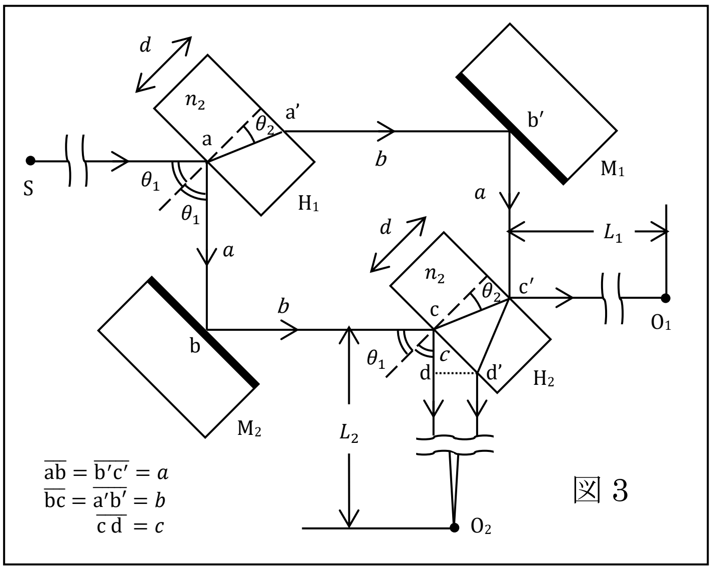


図 3

§4 観測点での明るさ

観測点 O_1 , O_2 での光の明るさは, (8), (9) の F_1, F_2 に比例する。いまかりに, 2つの代用半透鏡の屈折率 n_2 を一定に保って, その厚さ d を連続的に変化させることができたとする。このとき, (1) より α は d に比例する変数となり, F_1と F_2 は $z = \cos\alpha$ の関数となる。この関数の最大最小問題を解くと次のようになる。

(i) $0 < r^2 \leqq \left(\sqrt{2}-1\right)^2$ のとき, $F_1(z)$ は単調減少関数で,

$$F_{1\max} = F_1(-1) = \frac{16r^2(1-r^2)^2}{(1+r^2)^4}$$

$$F_{1\min} = F_1(+1) = 0$$

(ii) $\left(\sqrt{2}-1\right)^2 \leqq r^2 < 1$ のとき, $F_1(z)$ は $z = \{2r^2 - (1-r^2)^2\}/(2r^2) \equiv z_{\mathrm{m}}$ で極大値をとり,

$$F_{1\max} = F_1(z_{\mathrm{m}}) = 1$$

$$F_{1\min} = F_1(+1) = 0$$

たとえば, $n_2 = 1.5$ でS偏光のとき, $r^2 = (-0.3033)^2 < \left(\sqrt{2}-1\right)^2$ となり, F_1 とF_2 のグラフは図4のようになる。

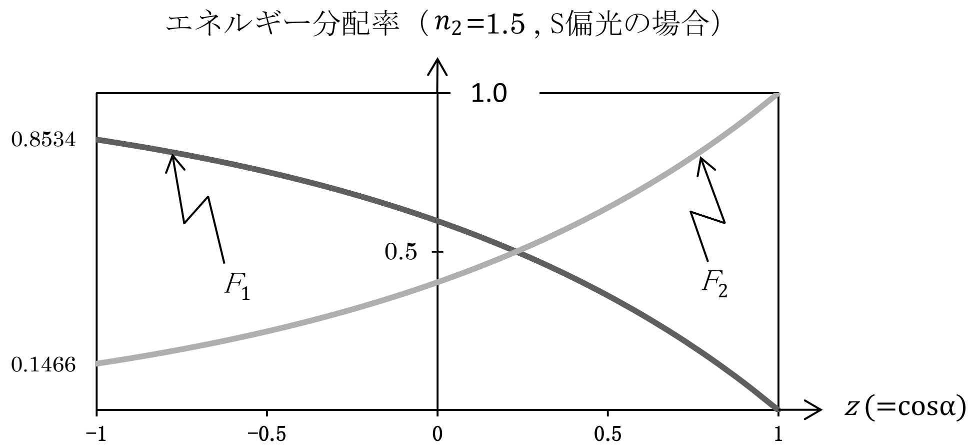


図 4

次に,「πだけの位相差をつくるセル」の問題に移ろう。たとえば, $\mathrm{H}_1\,\mathrm{M}_2$ 間と$\mathrm{M}_1\,\mathrm{H}_2$ 間に図 5 のようなガラス板を挿入すると, 反射による位相のずれに π の差を生じさせることができる。屈折光を取り除き, 7枚のガラス板の屈折率の組み合わせをうまく選べば, 2つの経路での複素振幅の減衰を同じにすることができるであろう。あるいは, ガラス板の代りに全反射鏡を用いて, 7枚の金属板の屈折率をうまく選べば, 反射による位相のずれに π の差を生じさせることができるであろう。実際に可能かどうかは別にして, 理論的には, π の位相差だけを作る理想的なセルがあるとして, O_1とO_2 での明るさがどうなるかを論じることができる。$\mathrm{H}_1\,\mathrm{M}_2$ 間にそのセルがあるとすると, O_1と O_2 に達する光の複素振幅は, それぞれ,

$$A_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}A\big(\text{下右右}\big) + A\big(\text{右下右}\big) = 0$$

$$A_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} A\bigl(下右下\bigr) + A\bigl(右下下\bigr) = A_0\ \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} - r^{\,2}}{1 - r^{\,2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta_2}$$

となる。よって，O_1 とO_2 へ向かうエネルギーの割合は，

$$F_1 = 0 \qquad\qquad F_2 = \left|\frac{A_2}{A_0}\right|^2 = 1$$

である。すなわち，O_1 で暗くなるが，O_2 では明るくなる。O_1，O_2 のどちらでも暗くなるという出題者の間違った判断は，ガラス板には厚さがあり，ガラス板内で多重反射があることを無視したことに起因する。

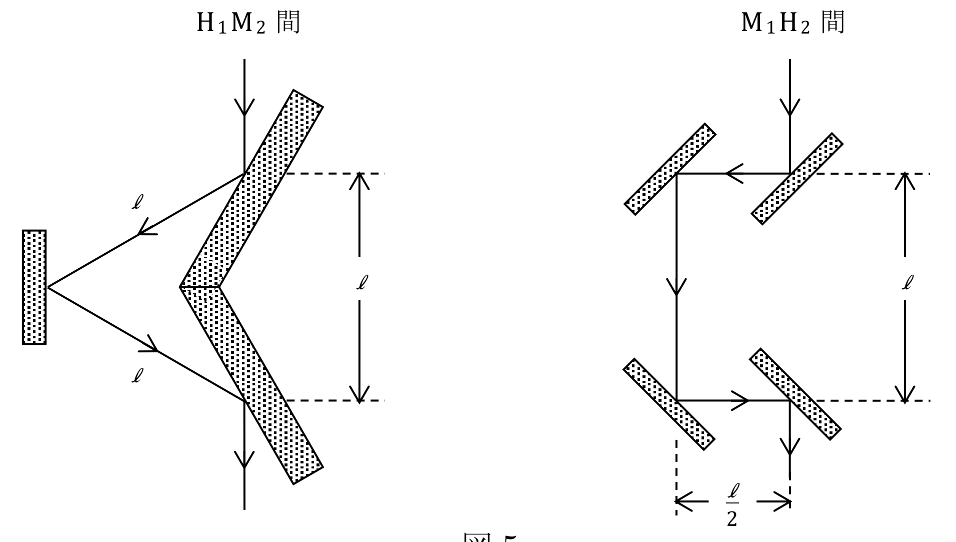


図 5

懸賞問題の作成者が想定している「π だけの位相差をつくるセル」は，「セル」という用語から判断して，多分図5のようなものではないであろう。それがどのようなものであれ，その構造と材質がわかれば，理論計算は可能である。ただし，構造が複雑になると厳密解を求めることは困難で，近似計算が必要となる。振幅反射率 r があまり大きくないときには，ガラス板で3回以上反射した光のエネルギーは無視できるほど小さくなるので，近似計算は2回多くて3回までの反射を取り入れて行えばよい。

真正半透鏡を用いたマッハ・ツェンダー干渉計については続編で論じる。

『パリティ』のバックナンバーからこの懸賞問題を捜し出して下さった牛尾健一氏に感謝します。

（注1）

2つの誘電体の境界面で光が全反射するとき，反射による位相のずれは π ではない（たとえば，文献1）。空気中の金属の表面で光が全反射するときも同様であり，位相のずれは金属の屈折率と光の入射角に依存する。これは手元にある教科書には載っていないので，文献2を挙げておく。

（注2）

「ファインマン物理学 IV」，岩波書店(1971)p.195 にある式（12.56）は符号が逆になっているが，これは著者の単純な間違いである。天才でも間違うことがある。

（注3）

「理化学辞典」，岩波書店（1987）p.1027 にある式は符号が逆になっているが，これは電場成分の正の向きの約束が異なるからである。ついでに言えば，p.1028 に「1923 年フレネルが…類似の式を導いたので，…」と書いてあり，「物理学辞典」，培風館（1992）p.1878 にも「…，1923 年にA.J.Fresnel によって導き出された。」と書いてある。校正漏れだろうが，一瞬，もしかしたらと思ってしまう。

参考文献

1) 霜田光一 ： レーザー物理入門，岩波書店（1983）p.45.

2) 斉藤全弘 ： マイケルソン干渉計における光波の干渉，駿台フォーラム 第 21 号(2003)p.95.
この文献は入手が困難と思われるので，要約を本稿の続編に再録する。

3) マックス・ボルン，エミル・ウォルフ ： 光学の原理，東海大学出版会（1975）p.508.

4) 霜田光一 ： 厚さのあるハーフミラーの位相差，パリティ 7，No.8，52(1992).
この解説記事では $t' = t$ としているが，これは正しくない。ただし，$tt' = 1 - r^2$ とすべきところを $t^2 = 1 - r^2$ として計算しているので，最終結果は正しい式になっている。

「熱中物理」に掲載されている論文の要約 は こちらへ