

大学教授も間違える遠心力の問題(後篇)

齊藤 全弘

§1 はじめに

[前篇](#)で取り上げた入試問題の作成者は、遠心力の公式 mv^2/r を使い間違えたのである。軌道が円でない場合にこの公式を用いて力のつり合いの式を立てるのなら、 r は着目している点での軌道の曲率半径でなければならない。同様の間違いは受験生によく見られる。たとえば、

「質量 M の地球のまわりに楕円軌道を描く人工衛星がある。その近地点距離が r_p 、遠地点距離が r_a であるとき、近地点と遠地点での人工衛星の速さ v_p と v_a を求めよ。ただし、万有引力定数を G とする。」

という問題は、力学的エネルギー保存則と面積速度一定の法則から、

$$v_p = \sqrt{\frac{2r_a}{r_p+r_a} \frac{GM}{r_p}}, \quad v_a = \sqrt{\frac{2r_p}{r_p+r_a} \frac{GM}{r_a}}$$

と求まる。ところが、近地点と遠地点で質量 m の人工衛星にはたらく遠心力をそれぞれ mv_p^2/r_p 、 mv_a^2/r_a として、万有引力との力のつりあいから、

$$v_p = \sqrt{\frac{GM}{r_p}}, \quad v_a = \sqrt{\frac{GM}{r_a}}$$

と答える生徒はめずらしくない。

軌道の曲率半径が大学入試に登場することは滅多にないが、京都大学(1986年)が楕円軌道の近地点と遠地点での曲率半径を求めさせる問題を出题したことがある。それらをそれぞれ ρ_p, ρ_a とすれば、曲率中心から見た近地点と遠地点での運動方程式の向心成分は、

$$m \frac{v_p^2}{\rho_p} = \frac{GMm}{r_p^2}, \quad m \frac{v_a^2}{\rho_a} = \frac{GMm}{r_a^2}$$

となり、

$$\rho_p = \frac{(r_p v_p)^2}{GM}, \quad \rho_a = \frac{(r_a v_a)^2}{GM}$$

を得る。そして、 $\rho_p = \rho_a$ であることから、 $r_p v_p = r_a v_a$ を導き出すという他に類をみない問題であった。

§2 曲率半径を用いた軌道の計算法

一般的に、平面上を運動する粒子の軌道は、運動方程式を解いて粒子の位置座標 (x, y) を時刻 t の関数として求め、パラメータ t を消去すれば軌道の式 $y = y(x)$ を得る。あるいは、運動の積分が二つあって、それらから $y(x)$ が満たすべき微分方程式が導かれる場合には、その微分方程式を解くことによって $y = y(x)$ を求めることができる。ここでは、保存力の中を運動する質量 m の粒子の軌道を、曲率半径に着目することによって求めてみよう。

慣性系で直交座標 $O - x y$ を設定し、求める軌道を $y = y(x)$ とする。軌道上の点 P での曲率半

径は

$$\rho = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''} \quad ①$$

で与えられる。ただし、 $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ である。図 1 のように、曲率円の中心をCとし、x 軸の正方向と \overrightarrow{PC} がなす角度を θ_c , \overrightarrow{OP} がなす角度を θ とし、 \overrightarrow{OP} と軌道の接線方向 \overrightarrow{PT} がなす角度を φ とする。このとき、

$$\varphi = \theta_c - \theta - \frac{\pi}{2}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$\tan \theta_c = -\frac{1}{y'}$$

$$\tan \varphi = \frac{xy' - y}{yy' + x}$$

$$\cos \varphi = \frac{yy' + x}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{1 + y'^2}}$$

$$\sin \varphi = \frac{xy' - y}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{1 + y'^2}} \quad ②$$

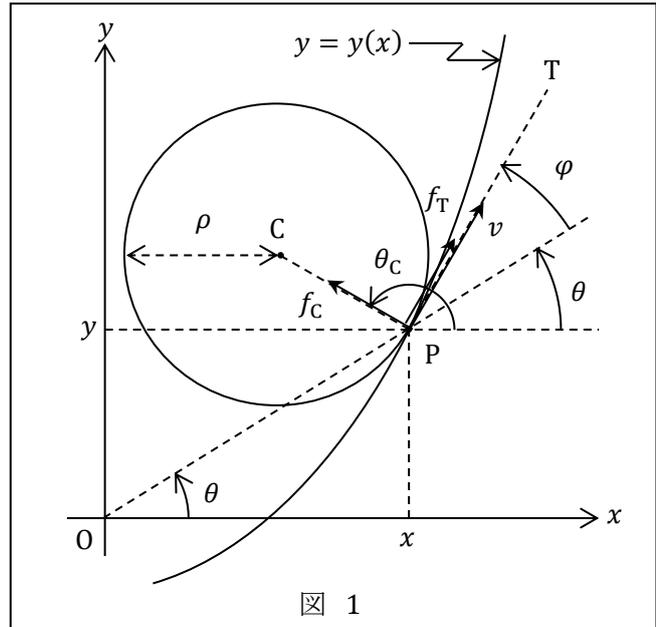


図 1

が成り立つ。

次に、保存力 \vec{f} の \overrightarrow{PC} 方向と \overrightarrow{PT} 方向の成分をそれぞれ f_c, f_T とし、点 P での速度の \overrightarrow{PT} 方向の成分を v とすれば、粒子の運動方程式は、

$$m \frac{v^2}{\rho} = f_c \quad ③$$

$$m \frac{dv}{dt} = f_T \quad ④$$

と表される。式④の両辺に v を掛けて t で積分すれば、力学的エネルギー保存則

$$\frac{1}{2} mv^2 + U(x, y) = E(\text{一定}) \quad ⑤$$

を得る。ただし、 $U(x, y)$ は保存力 \vec{f} の位置エネルギーである。式③, ⑤, ①より mv^2 と ρ を消去すれば、

$$2(E - U) \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = f_c \quad ⑥$$

となる。 f_c は x, y, y' の関数であるから、この微分方程式 (軌道方程式) を初期条件

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0' \quad ⑦$$

のもとに解けば、粒子の軌道 $y = y(x; x_0, y_0, y_0')$ が求まる。

§3 中心力の場合

等方的な中心力に限れば, $\overline{OP} = \vec{r}$, $r = |\vec{r}|$ として,

$$\vec{f} = f(r) \frac{\vec{r}}{r} \quad (8)$$

と表される。このとき,

$$f_C = -f(r) \sin \varphi \quad (9)$$

であるから, 式⑥, ⑨, ②より, 軌道方程式は次のようになる。

$$2(E - U)\sqrt{x^2 + y^2} y'' = -f(r)(1 + y'^2)(xy' - y) \quad (10)$$

一例として,

$$f(r) = \frac{k}{r^2} \quad (11)$$

の場合を考える。定数 k が正のときは原点 O から離れる向きの斥力を, 負のとき引力を表すが, いずれの場合も位置エネルギーは,

$$U(\vec{r}) = \frac{k}{r} \quad (12)$$

である。式⑪, ⑫を式⑩に代入すれば,

$$2\left(1 - \frac{E}{k}\sqrt{x^2 + y^2}\right)(x^2 + y^2)y'' = (1 + y'^2)(xy' - y) \quad (13)$$

となる。ここで, $E \neq 0$ のときは $l = |k/E|$ とし, $E = 0$ のときは l を適当な単位長さとして, 無次元変数

$$X = \frac{x}{l}, Y = \frac{y}{l} \quad (14)$$

を導入すれば, 軌道方程式は,

$$2(1 - P\sqrt{X^2 + Y^2})(X^2 + Y^2)Y'' = (1 + Y'^2)(XY' - Y) \quad (15)$$

となる。ただし, $Y' = \frac{dY}{dX}$, $Y'' = \frac{d^2Y}{dX^2}$ で, P は k と E の符号によって, 次のように $+1$ か -1 か 0 のいずれかの値をとる。

$$k < 0, E < 0 \text{ のとき } P = +1$$

$$k < 0, E > 0 \text{ のとき } P = -1$$

$$k < 0, E = 0 \text{ のとき } P = 0$$

$$k > 0, E > 0 \text{ のとき } P = +1$$

$k > 0, E \leq 0$ の運動はありえない。

初期条件: $Y(X_0) = Y_0$, $Y'(X_0) = Y'_0$ と P の値を与えて, 式⑮の数値解を求めれば,

$$P = +1 \text{ で, } X_0^2 + Y_0^2 < 1 \text{ の場合は引力による楕円軌道}$$

$$P = +1 \text{ で, } X_0^2 + Y_0^2 > 1 \text{ の場合は斥力による双曲線軌道}$$

$$P = -1 \text{ の場合は引力による双曲線軌道}$$

$$P = 0 \text{ の場合は引力による放物線軌道}$$

を得る。ただし, 計算の途中で $Y' = \pm\infty$ となる場合は, 軌道を分割して計算しなければならない。また, $Y'_0 = Y_0/X_0$ のときは, いずれの場合でも軌道は原点を通る直線となる。図 2 にこれらの軌道の一例が示されている。

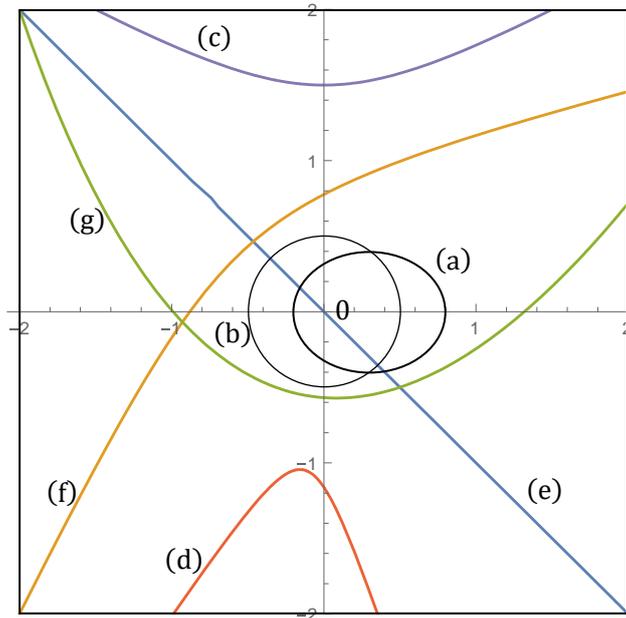


図 2

それぞれの軌道の P の値と初期値 (境界値) は以下のとおりである。

- (a) $P = +1$, $X_0 = -0.1999$, $Y_0 = \pm 0.008$, $Y'_0 = \pm 39.992$
- (b) $P = +1$, $X_0 = -0.5$, $Y_0 = 0$, $Y'(0) = 0$ と $X_0 = -0.4999$, $Y_0 = -0.01$, $Y(0) = -0.5$
- (c) $P = +1$, $X_0 = 0$, $Y_0 = 1.5$, $Y'_0 = 0$
- (d) $P = +1$, $X_0 = -2$, $Y_0 = -3.5$, $Y'_0 = 1.5$
- (e) $P = +1$, $X_0 = 2$, $Y_0 = -2$, $Y'_0 = -1$
- (f) $P = -1$, $X_0 = -2$, $Y_0 = -2$, $Y'_0 = 2$
- (g) $P = 0$, $X_0 = -2$, $Y_0 = 2$, $Y'_0 = -3$

他の中心力として, Hooke の力 $\vec{f}(\vec{r}) = -k\vec{r}$, Maxwell 分子 $U(\vec{r}) = kr^{-4}$, Lennard-Jones 模型 $U(\vec{r}) = -Ar^{-6} + Br^{-12}$, Yukawa ポテンシャル $U(\vec{r}) = -ke^{-\lambda r}/r$ の場合についても軌道を計算してみた。それぞれの場合について微分方程式⑩をさまざまな初期条件のもとに解き, その解をグラフで表示して見ていると, 単純な曲線が つぎつぎと送り返されてくる。当然のこととはいえ, 運動方程式の奥深さを見る思いがして感動する。

§3 中心力でない場合

一例として, 前篇で論じたばね振り子の鉛直面内での運動を取り上げる。おもりの運動方程式の \overrightarrow{PC} 方向の成分は,

$$m \frac{v^2}{\rho} = k(r - l) \sin \varphi - mg \cos(\theta + \varphi) \quad (16)$$

と表される (図 3 参照)。式①, ②と

$$\cos(\theta + \varphi) = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$$

および、力学的エネルギー保存則

$$\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} k(r-l)^2 + mgy = e \quad (\text{一定})$$

を用いて、式⑩を書き換えれば、

$$\{2e - k(r-l)^2 - 2mgy\} \frac{y''}{1+y'^2} = k(r-l) \frac{xy'-y}{r} - mg \quad (17)$$

となる。前篇と同様に、無次元変数

$$X = \frac{x}{l}, Y = \frac{y}{l}, P = \frac{mg}{kl}, E = \frac{e}{mgl}$$

を導入すれば、式⑰は

$$\{2PE - (\sqrt{X^2 + Y^2} - 1)^2 - 2PY\} Y'' = (1 - \frac{1}{\sqrt{X^2 + Y^2}})(1 + Y'^2)(XY' - Y) - P \quad (18)$$

と表される。初期条件も前篇と同様に、

$$t = 0 \text{ のとき, } x = l, y = 0, \dot{x} = 0, \dot{y} = 0$$

とすれば、 $E = 0$ であるから、軌道方程式は

$$\{(\sqrt{X^2 + Y^2} - 1)^2 + 2PY\} Y'' = P - (1 - \frac{1}{\sqrt{X^2 + Y^2}})(1 + Y'^2)(XY' - Y) \quad (19)$$

となる。

前篇の結論は、 $P = 0.513240\dots$ のとき、軌道は Y 軸に関して左右対称となり、最下点の Y 座標が $Y_B = -2.427576\dots$ となる、ということであった。実際にそのようになっているかどうかを確認するために、式⑱を初期条件

$$X_0 = 0, Y_0 = -2.427576, Y'_0 = 0$$

のもとに解いたところ、図4のように前篇の図3と同じ軌道が再現された。

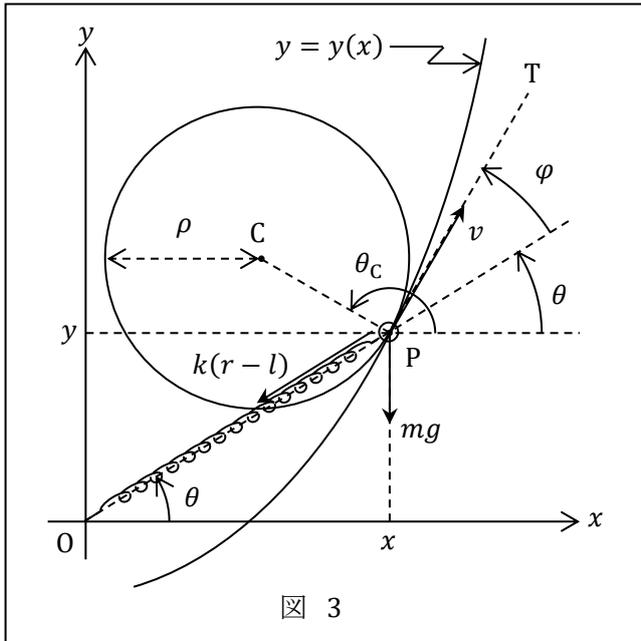


図 3

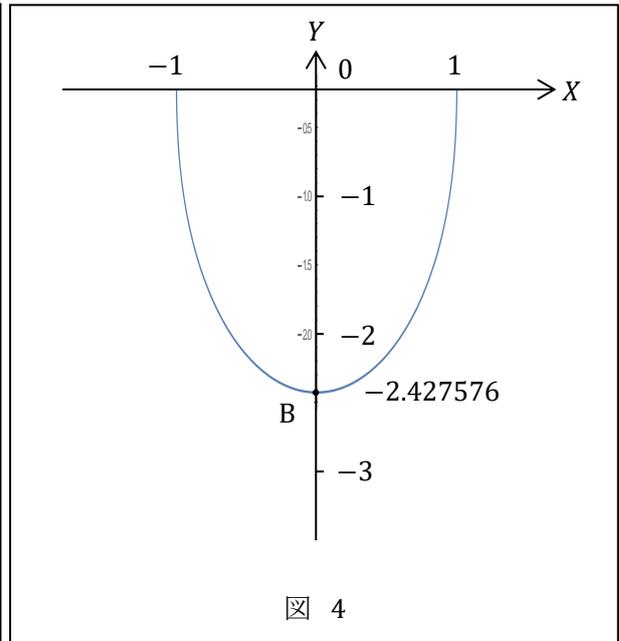


図 4

後篇の数値計算は Mathematica を用いて行った。