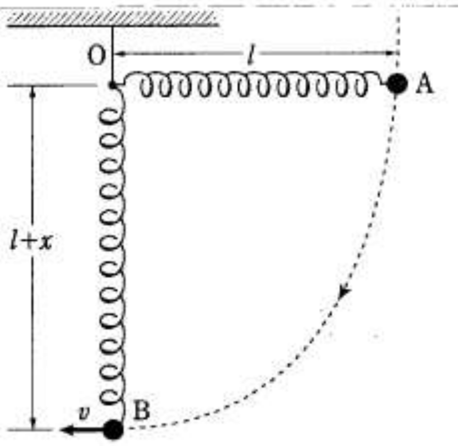
大学教授も間違える遠心力の問題（前篇）

斉藤　全弘

[1]　まずは次の大学入試問題を一読していただきたい。

次の文の$\boxed{}$の中に入れるべき正しい答えを，それぞれの解答群の中から選べ。ただし，重力加速度の大きさを g とし，空気抵抗は無視する。



自然の長さ（自然長）l，ばね定数 k で質量の無視できるつるまきばねがある。このばねの上端を支点Oに固定し，下端に質量 m の小さなおもりを静かにつるした。このときのばねの自然長から伸び x_0 は$\boxed{\text{ア}}$である。次に図のように，おもりを支点Oと同じ高さでばねが自然長 l になるような位置A点で支えてから静かにはなす。運動の間，ばねはたわむことはないとする。おもりの運動とともにばねはじょじょに伸び，支点Oの真下の点Bでばねの伸びが最大となった。そのときのばねの自然の長さからの伸びを x，おもりの速さを v とする。B点での力のつりあいの式は$\boxed{\text{イ}}$である。また，力学的エネルギー保存則から，$\boxed{\text{ウ}}$が得られる。

ア，イ，ウ の式から，x を l と x_0 で表すと $x=\boxed{\text{エ}}$となる。x と x_0 を比較すると，つねに $x>x_0$ である。その理由は，$\boxed{\text{オ}}$である。

もしかりに，ばねが伸びないとすると，おもりをA点で静かにはなしたときの最下点でのおもりの速さ v_0 は$\boxed{\text{カ}}$となるはずである。**ウ，カ**の式を用いて変形すると，式 $\dfrac{1}{2}mv^2-\dfrac{1}{2}mv_0{}^2$ は，$\boxed{\text{キ}}$と表される。ばねが自然の長さから x だけ伸びたときのおもりの運動エネルギーは，ばねが伸びないと仮定したときの運動エネルギーに比べて，伸びによる$\boxed{\text{ク}}$だけ大きくなり，伸びによる$\boxed{\text{ケ}}$だけ小さくなる。**ク**が**ケ**より大きいときに，$v>v_0$ となるが，そのための必要十分条件を x と x_0 で表すと$\boxed{\text{コ}}$となる。

アの解答群

⓪ $\dfrac{l}{2}$　① $\dfrac{k}{mg}$　② $\dfrac{kl}{g}$　③ $\dfrac{mg}{k}$　④ $\dfrac{mg}{l}$　⑤ $mg-kl$

イの解答群

⓪ $mg+m(l+x)v^2=kx$　① $mg=m(l+x)v^2+kx$

② $mg+\dfrac{mv^2}{l}=kx$　③ $mg+kx=\dfrac{mv^2}{l}$

④ $mg=kx+\dfrac{mv^2}{l}$　⑤ $mg+\dfrac{mv^2}{l+x}=kx$

ウの解答群

⓪ $mgl=\dfrac{1}{2}mv^2+\dfrac{1}{2}kx^2$　① $mgl+\dfrac{1}{2}mv^2=\dfrac{1}{2}kx^2$

② $mgl+\dfrac{1}{2}kx^2=\dfrac{1}{2}mv^2$　③ $mg(l+x)+\dfrac{1}{2}mv^2=\dfrac{1}{2}kx^2$

④ $mg(l+x)=\dfrac{1}{2}kx^2+\dfrac{1}{2}mv^2$　⑤ $mg(l+x)+\dfrac{1}{2}kx^2=\dfrac{1}{2}mv^2$

エの解答群

⓪ $l+x_0$　① $l-3x_0$

② $\dfrac{l-3x_0-\sqrt{(3x_0-l)^2-24x_0l}}{4}$　③ $\dfrac{3x_0-l+\sqrt{(3x_0-l)^2+24x_0l}}{4}$

④ $\dfrac{3x_0-l+\sqrt{(3x_0-l)^2-24x_0l}}{4}$　⑤ $\dfrac{l-3x_0+\sqrt{(3x_0-l)^2+24x_0l}}{4}$

オの解答群

⓪ 運動エネルギーは，弾性エネルギーと位置エネルギーの和となるから

① 重力は弾性力だけでなく遠心力をも加えた合力とつりあうから

② 弾性力は重力だけでなく遠心力をも加えた合力とつりあうから

③ 弾性エネルギーは，位置エネルギーと運動エネルギーの和となるから

カの解答群

⓪ gl　① mg　② mgl　③ $\sqrt{gl}$　④ $\sqrt{2gl}$　⑤ $\sqrt{\dfrac{gl}{2}}$

キの解答群

⓪ $-\dfrac{1}{2}kx^2-mgx$　① $-\dfrac{1}{2}kx^2+mgx$

② $\dfrac{1}{2}kx^2+mgx$　③ $\dfrac{1}{2}kx^2-mgx$

ク，**ケ**の解答群

⓪ 位置エネルギーの変化分　① 運動エネルギーの変化分

② 弾性エネルギーの変化分

コの解答群

⓪ $x=x_0$　① $x<x_0$　② $x=2x_0$　③ $x>2x_0$　④ $x<2x_0$　⑤ $x>\dfrac{x_0}{2}$

この問題の作成者が想定している正解は，

（ア）③　（イ）⑤　（ウ）④　（エ）③　（オ）②　（カ）④　（キ）①　（ク）⓪　（ケ）②　（コ）④

であるようだが，気がつかれたであろうか，$\boxed{\text{イ}}$ の解答群に正解がないのである。では正しい関係式はどのように表せるのかとなると，答を得るのは簡単ではない。まず，図の OB に関して左右対称となる軌道を描くための条件を求めなければならない。つぎに，その条件が満たされているとき，B 点での軌道の曲率半径を求め，それを用いて曲率中心から見たB点 での運動方程式を立てればよい。以下の計算では，逆に，運動方程式の数値解からB点 での軌道の曲率半径を求める。

この問題の導入部では慣性系に立ってばね振り子の運動を説明しているのに，設問 $\boxed{\text{イ}}$でいきなり「力のつりあいの式」という言葉が出てくる。「力がつりあう」というのは「おもりに働く力の合力が 0 になる」ということであるから，おもりの加速度が 0 となるような非慣性系になんの断りもなく乗り移っているのである。そのような非慣性系として，B 点で軌道に接する曲率円の中心の周りに，おもりと同じ角速度で回転する回転座標系を採用すれば，おもりはB 点近傍で静止し，おもりに働く重力と弾性力と遠心力がつりあう。おもりは O 点の周りに円運動していないことを見落としてはならない。

[2]　運動方程式

図1のような直交座標 (x, y) を導入して運動方程式を立てれば，

$$m\ddot{x} = -kx + kl\,\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \cdots①$$

$$m\ddot{y} = -ky + kl\,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - mg \qquad \cdots②$$

となる。この微分方程式には解析的な一般解があるかもしれないと思い，いろいろ考えてみたのであるが，見つけることはできなかった。仕方がないので，数値積分によってこの微分方程式を解くことにした。

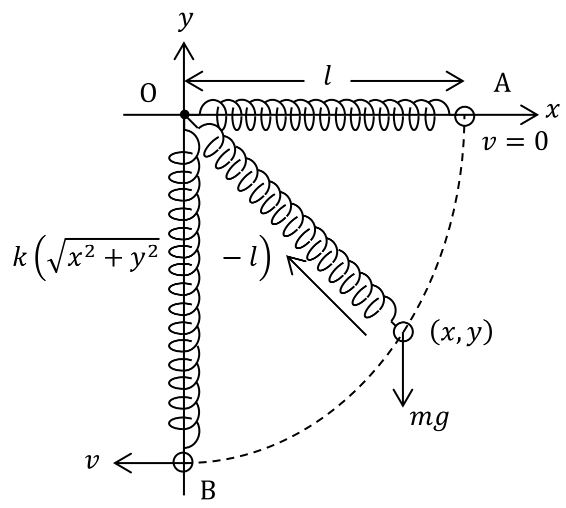


図　1

$$X = \frac{x}{l}\ ,\ Y = \frac{y}{l}\ ,\ T = \omega t\ ,\ P = \frac{mg}{kl}\ ,\ \text{ただし，}\ \omega^2 = \frac{k}{m} \qquad \cdots③$$

によって無次元変数（大文字）を導入すると，式①と式②は，

$$U = \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}T} \qquad \cdots④ \qquad\qquad V = \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}T} \qquad \cdots⑤$$

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T} = -X + \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}} \qquad \cdots⑥ \qquad\qquad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T} = -Y + \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}} - P \qquad \cdots⑦$$

と書き換えられる。上記の入試問題の場合，初期条件は，

$$X = 1\ ,\ Y = 0\ ,\ U = 0\ ,\ V = 0 \qquad \cdots⑧$$

である。

[3]　力学的エネルギー保存則

①$\times\dot{x}$ + ②$\times\dot{y}$ より，

$$m\dot{x}\ddot{x}+m\dot{y}\ddot{y}=-k(x\dot{x}+y\dot{y})+\frac{kl}{\sqrt{x^2+y^2}}(x\dot{x}+y\dot{y})-mg\dot{y}$$

これを時刻 t で積分すれば，

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{2}k\left(\sqrt{x^2+y^2}-l\right)^2+mgy=e\ （一定） \quad \cdots ⑨$$

を得る。$E=e/mgl$ として，式⑨を無次元変数で表せば，

$$\frac{1}{2}(U^2+V^2)+\frac{1}{2}\left(\sqrt{X^2+Y^2}-1\right)^2+PY=E \quad \cdots ⑩$$

となる。初期条件⑧のもとでは，$E=0$ である。数値積分をするとき，式⑩が計算精度の目安となる。

[4]　数値計算

連立の微分方程式④～⑦を初期条件⑧のもとに，4 次の Runge- Kutta 法で解いた。まず，パラメータ P にいくつか適当な数値を与えて解き，それを基にして反復収束法で，軌道が y 軸に対して左右対称となる解を捜した。その結果，

$$P=0.513240\cdots\cdots \quad \cdots ⑪$$

のとき，軌道は左右対称となり，B 点の Y 座標とそこでのおもりの速さは，それぞれ，

$$Y_{\mathrm{B}}=-2.427576\cdots\cdots \quad \cdots ⑫$$

$$|U_{\mathrm{B}}|=0.672572\cdots\cdots \quad \cdots ⑬$$

となることがわかった。$X-Y$ 平面上での軌道は図 2 のようになる。

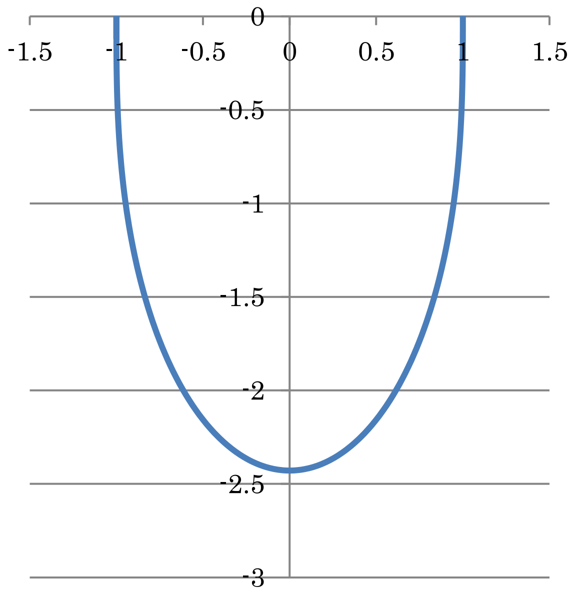


図　2

[5]　入試問題の正しい答

問題文にあるように，B 点でのばねの伸びをx，おもりの速さをvとし，軌道の曲率半径をrとすれば，曲率中心から見たB 点での運動方程式の向心 成分は，

$$m\,\frac{v^2}{r} = kx - mg \qquad \cdots⑭$$

と表される。これより，

$$r = \frac{mv^2}{kx - mg} \qquad \cdots⑮$$

を得る。$R = r\,/\,l$として，式⑮を無次元変数で書き換えれば，

$$R = \frac{U_{\mathrm{B}}^2}{|Y_{\mathrm{B}}| - 1 - P} \qquad \cdots⑯$$

となる。これに，⑪，⑫，⑬の数値を代入すれば，

$$R = 0.494734\cdots\cdots$$

を得る。したがって，式⑭を書き換えれば，

$$mg + \frac{mv^2}{(0.494734\cdots\cdots) \times l} = kx \qquad \cdots⑰$$

$$= (1.427576\cdots\cdots) \times kl$$

となる。式⑰が入試問題 $\boxed{\text{イ}}$ の答である。

「熱中物理」に掲載されている論文の要約　は　こちらへ