ダイナミックスピーカーの T/S パラメーター

斉藤全弘

§1 ダイナミックスピーカーの構造

図 1 は動電型（直接放射）拡声器 [electro– dynamic (direct radiation) loudspeaker：通称ダイナミックスピーカー] の模式断面図である。ホーンなどを用いずに，振動板から直接音波を空気中に放射することを直接放射という。

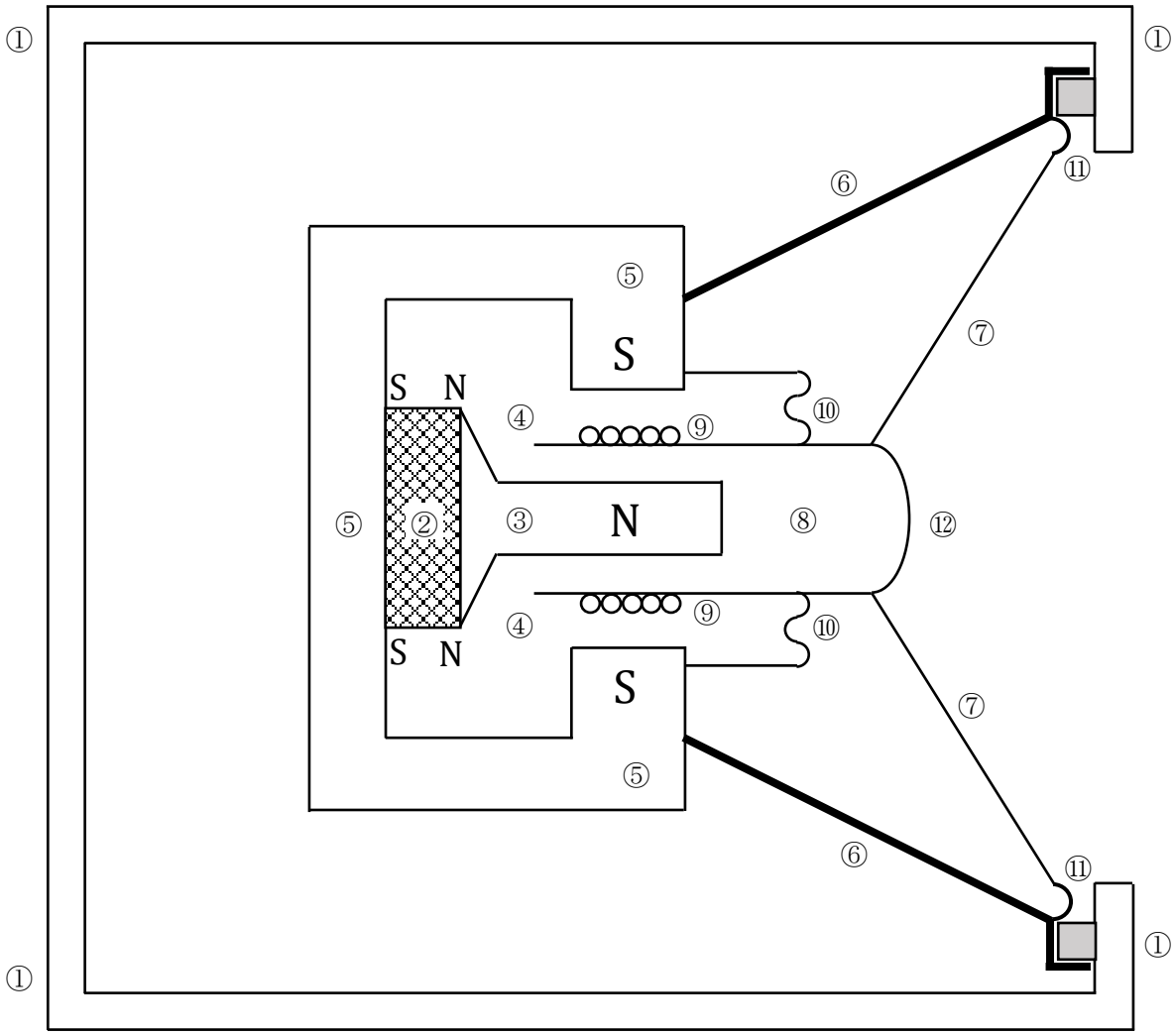


図　1

図の①は音波を放射する本体 (driver) を収納する箱 (enclosure) で，ここではいずれ実験で用いる予定の密閉型エンクロージャーが描かれている。永久磁石②，pole piece③，細隙④，yoke⑤から成る磁気回路を枠⑥ (frame , housing) で支え，エンクロージャーに固定する。細隙での磁束密度を ***B*** とする。⑦は円錐形の振動板 (diaphragm , cone) で，紙で作られているものが多い。円錐形にしてあるのは，振動板が一体となって振動するように，強度をもたせるためである。コーンの

左側は円筒⑧ (bobbin) につながっており，ボビンには長さ ℓ の導線が巻かれている。そのコイル⑨ (voice coil , moving coil) が細隙のなかを左右方向にだけ振動するように，ドライバーは半径方向に波打つ円環状の中心支持⑩ (spider , damper) と周辺支持⑪ (edge , surround) で支えられている。これらの支持(suspender)がドライバーに及ぼす弾性力の合力のコンプライアンス [スティフネス (弾性定数) の逆数] を C_{MS} とする。これらのサスペンダーはドライバーにその速度に比例する抵抗力もおよぼす。さらに，ドライバーには空気の粘性による抵抗力もはたらく。これらの抵抗力の合力の比例係数を R_{MS} とする。⑫は防塵カバー (dust cover cap) である。コーン，ボビン，ボイスコイル，キャップおよびサスペンダーの可動部分から成るドライバーの全質量を M_{MD} とする。

パラメーターの記号は，世界標準となっている T/S パラメーター (Thiele / Small parameters：文献 1) に用いられているもの (初出のときに赤いフォントで示してある) , あるいはそれに準じたものを採用した。これらの記号は添字がややこしい。本稿に出てくるものでは，M は Mechanical , E は Electrical , A は Acoustical , D は Driver か Diaphragm , R は Radiation , g は generator , T は Total , S は多分線形近似を保証する small − signal の頭文字である。

§2　基本方程式とその解

以下の理論計算では，簡単のために，振動板を半径 a (面積 $S_{\mathrm{D}} = \pi a^2$) の円板とし，密閉型エンクロージャーの代わりに，図 2 のように，円板の外側に無限遠まで広がる剛体板 (baffle) を採用する。無限大バッフルは，振動円板の後面から放射された音波が回り込んで，前面から放射された音波と干渉しないようにするためのものである。

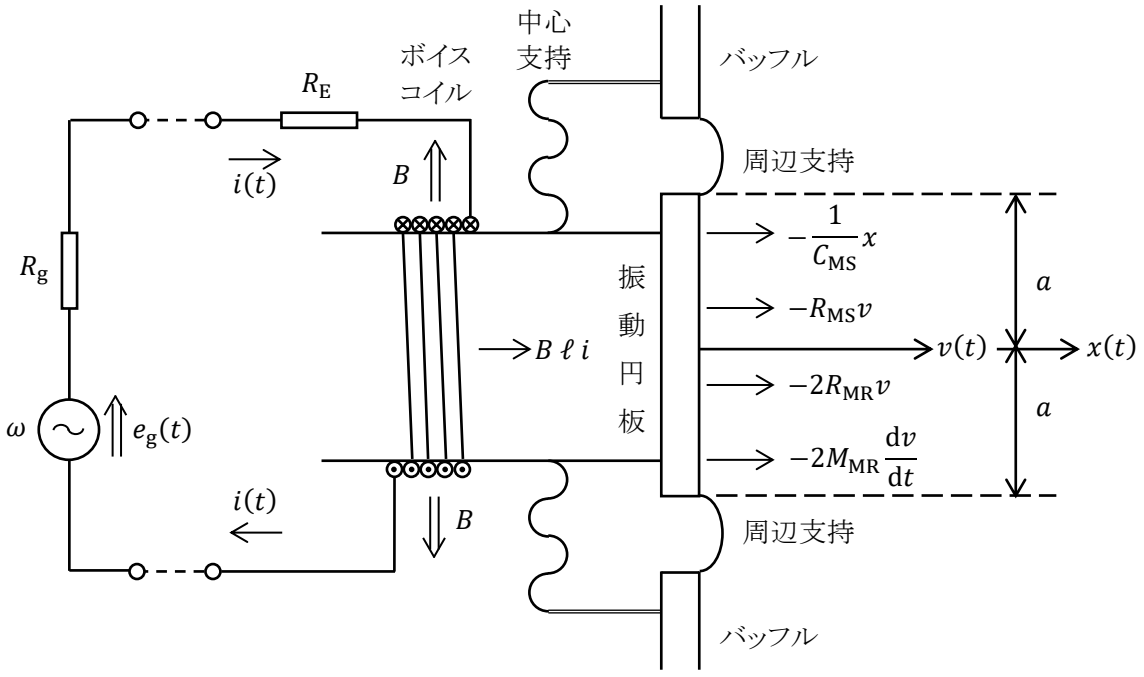


図　2

図 2 のように，ボイスコイルに電源 (角周波数 ω , 開放電圧 $e_{\mathrm{g}}(t)$, 内部抵抗 R_{g}) を接続すると，電流 $i(t)$ が流れ，ボイスコイルに電磁力 $B\ell i$ がはたらく。これが起振力となってドライバーが振動

する。その変位を $x(t)$, 速度を $v(t)$ とする。i , x , v とドライバーにはたらく力は図の矢印の向きを正とする。

振動円板の片面での固有放射インピーダンスを z_0 , その表面での平均音圧を $p(t)$ とすれば, 円板の片面が音圧から受ける力 $f_{\mathrm{MR}}(t)$ は,

$$f_{\mathrm{MR}} = -S_{\mathrm{D}}\, p = -S_{\mathrm{D}}\, z_0\, v$$

$$\cong -S_{\mathrm{D}} \left\{ \rho\, c\, \frac{(\kappa a)^2}{2} + \mathrm{j}\, \rho\, c\, \frac{8(\kappa a)}{3\pi} \right\} v \qquad \left(\mathrm{j}\text{ は虚数単位}\right) \tag{1}$$

と表される (文献 2) 。ただし, ρ は空気の密度で, 音速 c と (角) 波数 κ の間には,

$$\kappa = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} \tag{2}$$

の関係がある。f は音波の振動数である。式 (1) は $\kappa\, a \lesssim 1$ のときに近似的に成り立つ。ここで,

$$R_{\mathrm{MR}} = \frac{1}{2}\, S_{\mathrm{D}}\, \rho\, c\, (\kappa\, a)^2 \tag{3}$$

$$M_{\mathrm{MR}} = \frac{8}{3\pi}\, S_{\mathrm{D}}\, \rho\, a = \frac{8}{3}\, \rho\, a^3 \tag{4}$$

とおき, 式 (2) と定常状態 $\left(v = V\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right)$ のときに成り立つ式

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \mathrm{j}\omega v$$

を用いれば, 式 (1) は

$$f_{\mathrm{MR}} = -R_{\mathrm{MR}} v - M_{\mathrm{MR}}\, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{5}$$

と表される。右辺の第 1 項は円板の速度に比例する抵抗力で, 第 2 項は加速度に比例する抵抗力である。一般的に, 流体中を加速運動する物体には速度に比例する抵抗力と加速度に比例する抵抗力がはたらく。

これらの力を考慮して, ドライバーの運動方程式を書けば,

$$M_{\mathrm{MD}}\, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = B\, \ell\, i - \frac{1}{C_{\mathrm{MS}}}\, x - R_{\mathrm{MS}} v - 2R_{\mathrm{MR}} v - 2M_{\mathrm{MR}}\, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{6}$$

となる。右辺の第 4 項と第 5 項に 2 がついているのは, 円板の両面に同じ力 f_{MR} がはたらくからである。右辺の第 5 項を左辺に移項し, 整理すれば, 式 (6) は

$$(M_{\mathrm{MD}} + 2M_{\mathrm{MR}})\, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = B\, \ell\, i - \frac{1}{C_{\mathrm{MS}}}\, x - (R_{\mathrm{MS}} + 2R_{\mathrm{MR}}) v \tag{7}$$

と書き換えられる。このように円板が空気中で振動するときには, 質量 $2M_{\mathrm{MR}}$ の空気が円板に付着して円板の質量が増加するとみることができる。この増加分を付加質量 (air load mass) という。

ボイスコイルの直流抵抗を $\boldsymbol{R_{\mathrm{E}}}$, インダクタンスを $\boldsymbol{L_{\mathrm{E}}}$ とすれば, キルヒホッフの法則より,

$$e_{\mathrm{g}} - B\, \ell\, v - L_{\mathrm{E}}\, \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = R_{\mathrm{g}}\, i + R_{\mathrm{E}}\, i \tag{8}$$

が成り立つ。左辺の第 2 項はボイスコイルが磁場中を運動することによって生じる誘導 (逆) 起電力である。

ここで各変数の定常状態での複素振幅を導入して,

$$\left.\begin{aligned} &e_{\mathrm{g}}(t) = E_{\mathrm{g}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\ , \quad i(t) = I\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\ , \quad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \mathrm{j}\omega\, I\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \\ &v(t) = V\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\ , \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \mathrm{j}\omega\, V\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\ , \quad x(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t = \frac{V}{\mathrm{j}\omega}\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

とおき, これらを式 (7) と式 (8) に代入すれば,

$$(M_{\mathrm{MD}} + 2M_{\mathrm{MR}})\,\mathrm{j}\omega\, V = B\,\ell\, I - \frac{1}{C_{\mathrm{MS}}}\,\frac{V}{\mathrm{j}\omega} - (R_{\mathrm{MS}} + 2R_{\mathrm{MR}})V \tag{10}$$

$$E_{\mathrm{g}} - B\,\ell\, V - L_{\mathrm{E}}\,\mathrm{j}\omega\, I = R_{\mathrm{g}}\, I + R_{\mathrm{E}}\, I \tag{11}$$

を得る。式 (10) と式 (11) を V と I について解けば,

$$V = \frac{E_{\mathrm{g}}}{B\,\ell}\,\frac{B^2\ell^2}{B^2\ell^2 + \left(R_{\mathrm{g}}+R_{\mathrm{E}}+\mathrm{j}\omega L_{\mathrm{E}}\right)\left\{(R_{\mathrm{MS}}+2R_{\mathrm{MR}})+\mathrm{j}\left(\omega(M_{\mathrm{MD}}+2M_{\mathrm{MR}}) - \frac{1}{\omega C_{\mathrm{MS}}}\right)\right\}} \tag{12}$$

$$I = E_{\mathrm{g}}\,\frac{(R_{\mathrm{MS}}+2R_{\mathrm{MR}})+\mathrm{j}\left(\omega(M_{\mathrm{MD}}+2M_{\mathrm{MR}}) - \frac{1}{\omega C_{\mathrm{MS}}}\right)}{B^2\ell^2 + \left(R_{\mathrm{g}}+R_{\mathrm{E}}+\mathrm{j}\omega L_{\mathrm{E}}\right)\left\{(R_{\mathrm{MS}}+2R_{\mathrm{MR}})+\mathrm{j}\left(\omega(M_{\mathrm{MD}}+2M_{\mathrm{MR}}) - \frac{1}{\omega C_{\mathrm{MS}}}\right)\right\}} \tag{13}$$

となる。

§3 低音域スピーカーの特性と T/S パラメーター

この節と次節の内容は文献 1 の一部を要約したものである (注 1) 。

一般的にボイスコイルのインダクタンス L_{E} は小さいので, 低音域スピーカー (woofer) の特性を論じるときには, そのリアクタンス ωL_{E} を無視することが多い。低音域に明確な境界があるわけではないが, ここでは一応 $f < 200\mathrm{Hz}$ を目安とする。f~200Hz の場合には, ωL_{E}~R_{E} となることもあるのだが, この節では $\omega L_{\mathrm{E}} = 0$ とする。通常のダイナミックスピーカーでは, $M_{\mathrm{MR}} \ll M_{\mathrm{MD}}$ であるので, 水中での実験のような特殊な場合を除けば, 付加質量 M_{MR}は無視してよい。また, 低音域では $R_{\mathrm{MR}} \ll R_{\mathrm{MS}}$ となるので, この節では $R_{\mathrm{MR}} = 0$ とする。高音域で ωL_{E} と R_{MR} が無視できない場合は §5 で扱う。

まず, 式 (12) において $\omega L_{\mathrm{E}} = 0$, $R_{\mathrm{MR}} = 0$ とし,

$$R_{\mathrm{MS}} + \frac{B^2\ell^2}{R_{\mathrm{g}}+R_{\mathrm{E}}} \equiv R_{\mathrm{MT}}\ , \quad M_{\mathrm{MD}} + 2M_{\mathrm{MR}} \equiv \boldsymbol{M_{\mathrm{MS}}} \tag{14}$$

とおけば, 速度の振幅は,

$$V = \frac{E_{\mathrm{g}}B\,\ell\,\left(R_{\mathrm{g}}+R_{\mathrm{E}}\right)^{-1}}{R_{\mathrm{MT}}+\mathrm{j}\omega M_{\mathrm{MS}}+(\mathrm{j}\omega C_{\mathrm{MS}})^{-1}} \tag{15}$$

$$= \frac{E_{\mathrm{g}}B\ell}{(R_{\mathrm{g}}+R_{\mathrm{E}})\mathrm{j}\omega M_{\mathrm{MS}}}\ G(\mathrm{j}\omega) \tag{16}$$

ただし，

$$G(\mathrm{j}\omega) = \frac{(\mathrm{j}\omega)^2 C_{\mathrm{MS}} M_{\mathrm{MS}}}{(\mathrm{j}\omega)^2 C_{\mathrm{MS}} M_{\mathrm{MS}} + (\mathrm{j}\omega) C_{\mathrm{MS}} R_{\mathrm{MT}} + 1} \tag{17}$$

と書き換えられる。式 (15) は電源電圧 $e_{\mathrm{g}}(t)$ の時間変動に対する振動板速度$v(t)$の応答であり，V/E_{g} は電源電圧を入力，振動板速度を出力としたときの周波数伝達関数である。この周波数伝達関数を用いて，電磁気のエネルギーから音波のエネルギーへの変換効率を求める。文献 1 ではドライバーへの名目上の入力電力 P_{E} を次式で定義している。

$$P_{\mathrm{E}} = R_{\mathrm{E}} \left(\frac{|E_{\mathrm{g}}|/\sqrt{2}}{R_{\mathrm{g}} + R_{\mathrm{E}}} \right)^2 \tag{18}$$

無限大バッフル付の振動円板から前方へ放射される音波の出力は，

$$P_{\mathrm{A}} = R_{\mathrm{MR}} \left(|V| /\sqrt{2} \right)^2 \tag{19}$$

であるから，エネルギーの変換効率は

$$\eta = \frac{P_{\mathrm{A}}}{P_{\mathrm{E}}} = R_{\mathrm{MR}} |V|^2 \frac{(R_{\mathrm{g}} + R_{\mathrm{E}})^2}{R_{\mathrm{E}} |E_{\mathrm{g}}|^2} \tag{20}$$

となる。式 (20) に式 (3) と式 (16) を代入すれば，

$$\eta = \frac{\rho}{2\pi c} \frac{{S_{\mathrm{D}}}^2 B^2 \ell^2}{R_{\mathrm{E}} M_{\mathrm{MS}}^2} |G(\mathrm{j}\omega)|^2 \tag{21}$$

を得る。この式において角周波数 ω は $G(\mathrm{j}\omega)$だけに含まれており，式 (17) からわかるように，$|G(0)| = 0$ ，$\lim_{\omega\to\infty} |G(\mathrm{j}\omega)| = 1$ であるから，$|G(\mathrm{j}\omega)|$ は HPF 関数 (High Pass Filter function) になっている。式 (21) の HPF 関数の前にある係数

$$\boldsymbol{\eta_0} = \frac{\rho}{2\pi c} \frac{{S_{\mathrm{D}}}^2 B^2 \ell^2}{R_{\mathrm{E}} M_{\mathrm{MS}}^2} \tag{22}$$

は透過周波数帯での効率で，参照効率 (reference efficiency) という。市販されているウーファーの参照効率の値は，例外的なものを除けば，1~3% である。

次に，式 (15) からわかるように，ドライバーの機械振動は図 3 の等価機械回路で表される。これと電気回路との対応関係から，この振動系の共振角振動数 $\boldsymbol{\omega_{\mathrm{S}}}$ は，

$$\omega_{\mathrm{S}} = \frac{1}{\sqrt{M_{\mathrm{MS}} C_{\mathrm{MS}}}} \tag{23}$$

で与えられ，$\omega = \omega_{\mathrm{S}}$ のときに速度振幅の大きさ $|V|$ は極大値をとる。

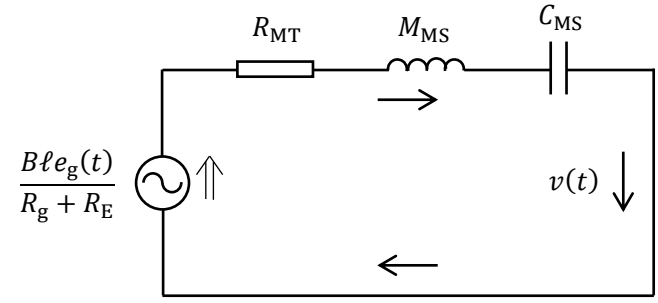


図 3　ドライバーの等価機械回路

RLC 直列電気回路の電流が v ,電源電圧が$B\ell e_{\mathrm{g}}(t)/(R_{\mathrm{g}} + R_{\mathrm{E}})$, 直流抵抗が R_{MT} , インダクタンスが M_{MS} , 電気容量が C_{MS} に対応する。

そのとき，共振の尖鋭度 Q_{TS} (Quality factor) は，

$$Q_{\mathrm{TS}} = \frac{\omega_{\mathrm{S}} M_{\mathrm{MS}}}{R_{\mathrm{MT}}} \tag{24}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{M_{\mathrm{MS}}}{C_{\mathrm{MS}}}}}{R_{\mathrm{MS}} + \frac{B^2\ell^2}{R_{\mathrm{g}}+R_{\mathrm{E}}}} \tag{25}$$

と表される (注2) 。

次に，電気インピーダンスを考える。式 (13) において $\omega L_{\mathrm{E}} = 0$, $R_{\mathrm{MR}} = 0$ とおけば，

$$\frac{E_{\mathrm{g}}}{I} = R_{\mathrm{g}} + R_{\mathrm{E}} + \frac{B^2\ell^2}{R_{\mathrm{MS}} + \mathrm{j}\omega M_{\mathrm{MS}} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_{\mathrm{MS}}}} \tag{26}$$

$$= R_{\mathrm{g}} + R_{\mathrm{E}} + \left\{ \frac{1}{\frac{B^2\ell^2}{R_{\mathrm{MS}}}} + \frac{1}{\left(\mathrm{j}\omega \frac{M_{\mathrm{MS}}}{B^2\ell^2}\right)^{-1}} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_{\mathrm{MS}} B^2\ell^2} \right\}^{-1} \tag{27}$$

を得る。ここで，

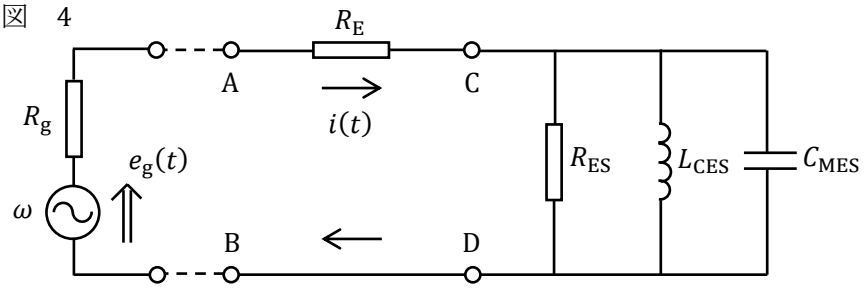
$$R_{\mathrm{ES}} \equiv \frac{B^2\ell^2}{R_{\mathrm{MS}}} \quad , \quad L_{\mathrm{CES}} \equiv C_{\mathrm{MS}} B^2\ell^2 \quad , \quad C_{\mathrm{MES}} \equiv \frac{M_{\mathrm{MS}}}{B^2\ell^2} \tag{28}$$

で定義されるパラメーターを導入すれば，式 (27) は

$$\frac{E_{\mathrm{g}}}{I} = R_{\mathrm{g}} + R_{\mathrm{E}} + \left\{ \frac{1}{R_{\mathrm{ES}}} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L_{\mathrm{CES}}} + \frac{1}{(\mathrm{j}\omega C_{\mathrm{MES}})^{-1}} \right\}^{-1} \tag{29}$$

と書き換えられる。式 (29) を等価電気回路で表せば，図 4 のようになる。

図 4



端子A B の右側がドライバーの等価電気回路である。

この図において，端子 A B から右側を見たときの電気インピーダンスは，ドライバーが空気中で自由に振動しているときのインピーダンスで自由インピーダンス (free impedance) と呼ばれる。それを $Z_{\mathrm{VC}}(\mathrm{j}\omega)$ で表す。また，AC 間の電気インピーダンス ($R_{\mathrm{E}} + \mathrm{j}\omega L_{\mathrm{E}}$) は，ドライバーを強制的に静止させた $(V = 0$ の$)$ ときのインピーダンスで，固定インピーダンス (damped impedance) と呼ばれ，端子 CD から右側を見たときの電気インピーダンスは，ドライバーが振動することによって新たに付け加わるインピーダンスで，動インピーダンス (motional impedance) と呼ばれる。図 4 には L_{CES} と C_{MES} から成る共振回路があるので，

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L_{\mathrm{CES}} C_{\mathrm{MES}}}} = \frac{1}{\sqrt{M_{\mathrm{MS}} C_{\mathrm{MS}}}} = \omega_{\mathrm{S}} \tag{30}$$

のときに共振し，電流振幅の大きさ $|I|$ が極小値をとることがわかる。

ここで，仮に図 4 の R_{E} がないとし，端子 AB から右側を見た RLC 並列回路が共振しているときの尖鋭度 $\boldsymbol{Q_{\mathrm{MS}}}$ を求めれば，

$$Q_{\mathrm{MS}} = \omega_{\mathrm{S}} C_{\mathrm{MES}} R_{\mathrm{ES}} = \omega_{\mathrm{S}} \frac{M_{\mathrm{MS}}}{R_{\mathrm{MS}}} = \frac{1}{R_{\mathrm{MS}}} \sqrt{\frac{M_{\mathrm{MS}}}{C_{\mathrm{MS}}}} \tag{31}$$

となる (注 3) 。同様に，仮に R_{ES} がないとしたときの尖鋭度 $\boldsymbol{Q_{\mathrm{ES}}}$ は，

$$Q_{\mathrm{ES}} = \omega_{\mathrm{S}} C_{\mathrm{MES}} R_{\mathrm{E}} = \omega_{\mathrm{S}} \frac{M_{\mathrm{MS}} R_{\mathrm{E}}}{B^2 \ell^2} = \frac{R_{\mathrm{E}}}{B^2 \ell^2} \sqrt{\frac{M_{\mathrm{MS}}}{C_{\mathrm{MS}}}} \tag{32}$$

となる (注 4) 。いま，$R_{\mathrm{g}} = 0$ となる場合を想定すれば，式 (25) , (31) , (32) より，

$$\frac{1}{Q_{\mathrm{TS}}} = \left(R_{\mathrm{MS}} + \frac{B^2 \ell^2}{R_{\mathrm{E}}} \right) \sqrt{\frac{C_{\mathrm{MS}}}{M_{\mathrm{MS}}}} = \frac{1}{Q_{\mathrm{MS}}} + \frac{1}{Q_{\mathrm{ES}}}$$

$$\therefore \quad Q_{\mathrm{TS}} = \frac{Q_{\mathrm{MS}} Q_{\mathrm{ES}}}{Q_{\mathrm{MS}} + Q_{\mathrm{ES}}} \tag{33}$$

の関係があることがわかる。

次に，式 (26) で，$R_{\mathrm{g}} = 0$ として自由インピーダンスを求めれば，

$$\begin{aligned} Z_{\mathrm{VC}}(\mathrm{j}\omega) &= R_{\mathrm{E}} + \frac{B^2 \ell^2}{R_{\mathrm{MS}}} \frac{1}{1 + \mathrm{j}\omega \frac{M_{\mathrm{MS}}}{R_{\mathrm{MS}}} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_{\mathrm{MS}} R_{\mathrm{MS}}}} \\ &= R_{\mathrm{E}} + R_{\mathrm{ES}} \frac{\mathrm{j}\omega C_{\mathrm{MS}} R_{\mathrm{MS}}}{\mathrm{j}\omega C_{\mathrm{MS}} R_{\mathrm{MS}} + (\mathrm{j}\omega)^2 C_{\mathrm{MS}} M_{\mathrm{MS}} + 1} \\ &= R_{\mathrm{E}} + R_{\mathrm{ES}} \frac{(\mathrm{j}\omega) T_{\mathrm{S}} / Q_{\mathrm{MS}}}{(\mathrm{j}\omega)^2 T_{\mathrm{S}}^2 + (\mathrm{j}\omega) T_{\mathrm{S}} / Q_{\mathrm{MS}} + 1} \end{aligned} \tag{34}$$

となる。ただし，

$$T_{\mathrm{S}} = \frac{2\pi}{\omega_{\mathrm{S}}} = \sqrt{M_{\mathrm{MS}} C_{\mathrm{MS}}} \tag{35}$$

である。実際のウーファーに対して次節で述べる測定実験を行えば，R_{E} と $B\ell$ を既知として，そのウーファーの T/S パラメーター ω_{S} ，Q_{MS} ，Q_{ES} ，M_{MS} ，C_{MS} ，R_{MS} の値が求まり，$G(\mathrm{j}\omega)$ と $Z_{\mathrm{VC}}(\mathrm{j}\omega)$ の関数形が確定する。

このようにして得た T/S パラメーターの値をもとにして，さまざまな制約のもとにそのウーファーの性能を最大限に発揮させるためにはどのようなエンクロージャーに取り付ければよいのかを，理論計算によって求めることができる。その計算はスピーカーの設計者やオーディオマニアの領域となるので，ここでは立ち入らない。

§4　T/S パラメーターの測定方法

あるダイナミックスピーカーの自由インピーダンスの大きさ $|Z_{\mathrm{VC}}(\mathrm{j}\omega)|$ を測定した結果，図 5 のようなグラフが得られたとする。

まず，$|Z_{\mathrm{VC}}|$ が最大値をとるときの共振角周波数 ω_{S} の値が，この図から直ちに読み取れる。また，

最大値 $R_{\mathrm{E}}+R_{\mathrm{ES}}$ と最小値 R_{E} の比

$$r_0=\frac{R_{\mathrm{E}}+R_{\mathrm{ES}}}{R_{\mathrm{E}}} \qquad (36)$$

の値もわかる。式 (31) と式 (32) を用いれば，この比は

$$r_0=1+\frac{Q_{\mathrm{MS}}}{Q_{\mathrm{ES}}}$$

と表されるので，何らかの方法で Q_{MS} の値がわかれば，次式から Q_{ES} と Q_{TS} の値もわかる。

$$Q_{\mathrm{ES}}=\frac{Q_{\mathrm{MS}}}{r_0-1} \qquad (37)$$

$$Q_{\mathrm{TS}}=\frac{Q_{\mathrm{MS}}Q_{\mathrm{ES}}}{Q_{\mathrm{MS}}+Q_{\mathrm{ES}}}$$

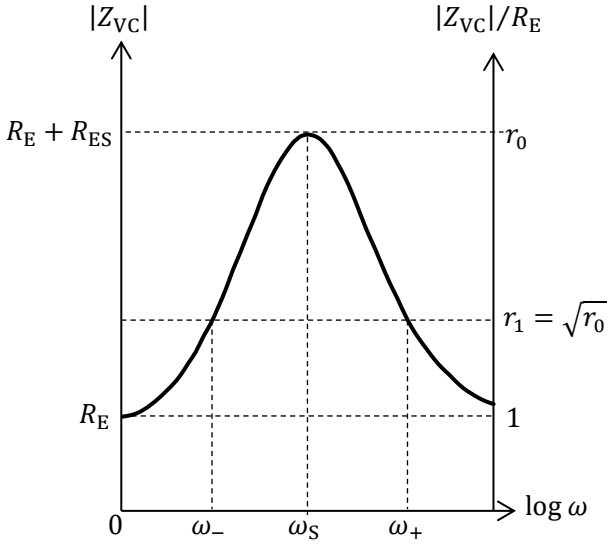


図　5

次に，式 (36) を用いて式 (34) を書き換えれば，

$$Z_{\mathrm{VC}}(\mathrm{j}\omega)=R_{\mathrm{E}}+R_{\mathrm{E}}(r_0-1)\,\frac{(\mathrm{j}\omega)T_{\mathrm{S}}/Q_{\mathrm{MS}}}{(\mathrm{j}\omega)^2T_{\mathrm{S}}^2+(\mathrm{j}\omega)T_{\mathrm{S}}/Q_{\mathrm{MS}}+1}$$

$$=R_{\mathrm{E}}\,\frac{r_0+Q_{\mathrm{MS}}\left\{(\mathrm{j}\omega)T_{\mathrm{S}}+\frac{1}{(\mathrm{j}\omega)T_{\mathrm{S}}}\right\}}{1+Q_{\mathrm{MS}}\left\{(\mathrm{j}\omega)T_{\mathrm{S}}+\frac{1}{(\mathrm{j}\omega)T_{\mathrm{S}}}\right\}} \qquad (38)$$

となり，

$$|Z_{\mathrm{VC}}(\mathrm{j}\omega)|^2=R_{\mathrm{E}}^2\,\frac{r_0^2+Q_{\mathrm{MS}}^2\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{S}}}-\frac{\omega_{\mathrm{S}}}{\omega}\right)^2}{1+Q_{\mathrm{MS}}^2\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{S}}}-\frac{\omega_{\mathrm{S}}}{\omega}\right)^2} \qquad (39)$$

を得る。ここで，$\omega_+\omega_-=\omega_{\mathrm{S}}^2$ ($0<\omega_-<\omega_+$) を満たす角周波数 ω_+ , ω_- を導入すれば，

$$|Z_{\mathrm{VC}}(\mathrm{j}\omega_+)|=|Z_{\mathrm{VC}}(\mathrm{j}\omega_-)| \qquad (40)$$

が成り立つ。式 (40) の値を $r_1\,R_{\mathrm{E}}$ とおけば，式 (39) より，

$$r_1^2\,R_{\mathrm{E}}^2=\left|Z_{\mathrm{VC}}(\mathrm{j}\omega_{\pm})\right|^2=R_{\mathrm{E}}^2\,\frac{r_0^2+Q_{\mathrm{MS}}^2\left(\frac{\omega_+-\omega_-}{\omega_{\mathrm{S}}}\right)^2}{1+Q_{\mathrm{MS}}^2\left(\frac{\omega_+-\omega_-}{\omega_{\mathrm{S}}}\right)^2} \qquad (41)$$

を得る。これを Q_{MS} について解けば，

$$Q_{\mathrm{MS}}=\frac{\omega_{\mathrm{S}}}{\omega_+-\omega_-}\sqrt{\frac{r_0^2-r_1^2}{r_1^2-1}} \qquad (42)$$

となる。ここで，$r_1=\sqrt{r_0}$ とすれば，式 (42) は次のような単純な式になる。

$$Q_{\mathrm{MS}}=\frac{\omega_{\mathrm{S}}}{\omega_+-\omega_-}\sqrt{r_0} \qquad (43)$$

まとめれば，R_{E} と $B\ell$ を既知として，次の手順で T/S パラメーターの値がすべて求まる。

図 5 の測定データ $\longrightarrow$ $\{\omega_{\mathrm{S}}\,,\ r_0\,,\ \omega_+ - \omega_-\}$

$\xrightarrow[(43)]{}$ $Q_{\mathrm{MS}} = \dfrac{\omega_{\mathrm{S}}}{\omega_+ - \omega_-}\sqrt{r_0}$

$\xrightarrow[(37)]{}$ $Q_{\mathrm{ES}} = \dfrac{Q_{\mathrm{MS}}}{r_0 - 1}$

$\xrightarrow[(32)]{}$ $M_{\mathrm{MS}} = \dfrac{Q_{\mathrm{ES}}\,B^2\ell^2}{\omega_{\mathrm{S}}\,R_{\mathrm{E}}}$

$\xrightarrow[(23)\,,(31)]{}$ $C_{\mathrm{MS}} = \dfrac{1}{M_{\mathrm{MS}}\omega_{\mathrm{S}}^2}\,,\quad R_{\mathrm{MS}} = \dfrac{M_{\mathrm{MS}}\omega_{\mathrm{S}}}{Q_{\mathrm{MS}}}$

文献 1 には C_{MS} の値を求める別の測定実験が与えられているが省略する。

§5 具体例での数値計算

市販されているウーファーで T/S パラメーターの値が公表されているものが文献 3に載っている。気柱共鳴の実験で用いられるダイナミックスピーカーの口径は 10cm 以下であることが多いので，掲載されている 200 個近いウーファーから口径が最も小さいもの (MODEL 136A) を選び出し，そのインピーダンス関数の大きさ $|Z_{\mathrm{VC}}(\mathrm{j}\omega)|$ と定電圧電源に対する振動板の速度振幅の大きさ $\left|V(\mathrm{j}\omega)\right|$ を，$1\mathrm{Hz} \leqq f \leqq 20\mathrm{kHz}$ の周波数帯で求めた。中音域 ($200\mathrm{Hz} \lesssim f \lesssim 1\mathrm{kHz}$) から高音域 ($1\mathrm{kHz} \lesssim f \lesssim 20\mathrm{kHz}$) にかけては，$\omega L_{\mathrm{E}} \ll R_{\mathrm{E}}$，$R_{\mathrm{MR}} \ll R_{\mathrm{MS}}$ が成り立っていないので，式 (13) と式 (12) に $R_{\mathrm{g}} = 0$，$M_{\mathrm{MR}} = 0$を代入した式から導かれる

$$|Z_{\mathrm{VC}}(\mathrm{j}\omega)| = \left|\frac{E_{\mathrm{g}}}{I}\right| = \left| R_{\mathrm{E}} + \mathrm{j}\omega L_{\mathrm{E}} + \frac{B^2\ell^2}{(R_{\mathrm{MS}}+2R_{\mathrm{MR}})+\mathrm{j}\left(\omega M_{\mathrm{MS}} - \frac{1}{\omega C_{\mathrm{MS}}}\right)} \right| \tag{44}$$

$$\left|\frac{V(\mathrm{j}\omega)}{E_{\mathrm{g}}/(B\ell)}\right| = \left|\frac{B^2\ell^2}{B^2\ell^2+(R_{\mathrm{E}}+\mathrm{j}\omega L_{\mathrm{E}})\left\{(R_{\mathrm{MS}}+2R_{\mathrm{MR}})+\mathrm{j}\left(\omega M_{\mathrm{MS}} - \frac{1}{\omega C_{\mathrm{MS}}}\right)\right\}}\right| \tag{45}$$

を用いて計算した。MODEL 136A の T/S パラメーターの値は次のようになっている。

$S_{\mathrm{D}} = 0.008\mathrm{m}^2$ ($a \fallingdotseq 5\mathrm{cm}$)，　$B\ell = 21\mathrm{Tm}$，

$R_{\mathrm{E}} = 6.3\Omega$，　$L_{\mathrm{E}} = 1.4\times10^{-3}\mathrm{H}$，　$f_{\mathrm{S}} = \omega_{\mathrm{S}}/(2\pi) = 16\mathrm{Hz}$

$M_{\mathrm{MS}} = 0.151\mathrm{kg}$，　$Q_{\mathrm{MS}} = 5.5$，　$Q_{\mathrm{ES}} = 0.22$，　$Q_{\mathrm{TS}} = 0.21$

$C_{\mathrm{MS}} = \dfrac{1}{\omega_{\mathrm{S}}^2 M_{\mathrm{MS}}} = 6.6\times10^{-4}\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^2$，　$R_{\mathrm{MS}} = \dfrac{\omega_{\mathrm{S}}M_{\mathrm{MS}}}{Q_{\mathrm{MS}}} = 0.17\mathrm{kg\,s}^{-1}$

また，R_{MR} は厳密な式

$$R_{\mathrm{MR}} = S_{\mathrm{D}}\,\rho\,c\,\{1 - \frac{2\mathrm{J}_1(x)}{x}\}\,,\quad x = 2\kappa\,a = \frac{2a\omega}{c}$$

を用いて計算した。$\mathrm{J}_1(x)$ は 1 階の第 1 種ベッセル関数である。 ρ と c は気温が 20 ℃ のときの値 ：$\rho = 1.21\ \mathrm{kg\,m}^{-3}$，$c = 344\ \mathrm{m\,s}^{-1}$ を仮定した。計算結果は図 6 と図 7 に与えられている。

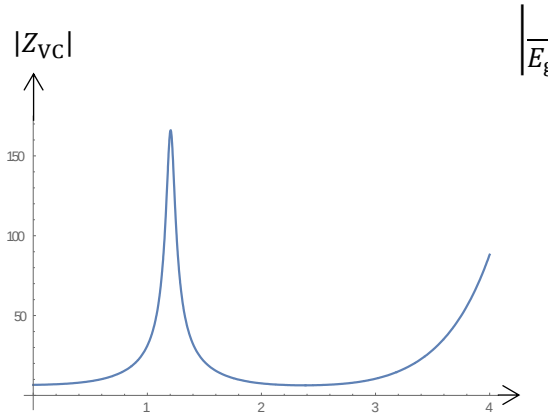


図　6

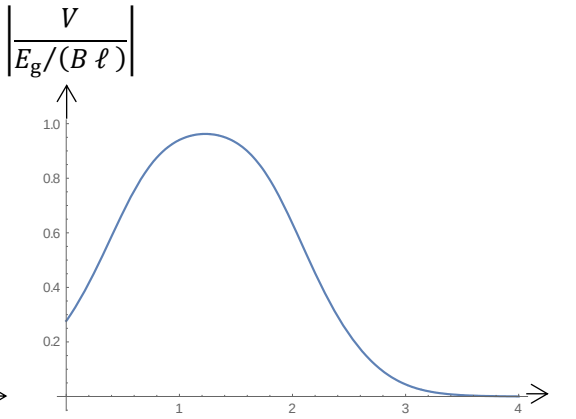


図　7

周波数 f を 1Hz から大きくしていくと，$|Z_{VC}|$ と $|V|$ は $f = 17\text{Hz}$ のときに極大値をとる。その値はそれぞれ 166 Ω と $0.962\left|E_g/(B\ell)\right|$ である。この周波数近辺で電流が最小となるのは，共振しているときの $\dfrac{V}{E_g/(B\ell)}$ の偏角が 0 に近いので，$B\ell\ V \sim 0.962E_g$ となり，逆起電力$B\ell V$ が電源電圧 E_g の 96.2% まで打ち消してしまうからである。

図 6 が示すように $30\text{Hz} \lesssim f \lesssim 2\text{kHz}$ では $|Z_{VC}|$ がほぼ一定となる。その間の最小値を公称インピーダンス (rated impedance) と言うが，スピーカー本体にはその数値を丸めて，4Ω , 6Ω , 8Ω , 16Ω などと表記されている。MODEL 136A では 6Ω である。公称インピーダンスと R_E の差は小さいので公称インピーダンスはボイスコイルの直流抵抗のおおよその値を示していると考えてよい。

周波数が 2kHz を越えると $|Z_{VC}|$ は増加し始めるが，これはボイスコイルのリアクタンス ωL_E からの寄与が大きくなるからである。

円筒にダイナミックスピーカーを取り付けて気柱共鳴実験をするとき，円筒の口径と長さの制約から，$500\text{Hz} \lesssim f \lesssim 1\text{kHz}$ の周波数帯で実験をすることが多い。この周波数帯で MODEL 136A のウーファーから空気中へ直接音波を放射すれば，図 7 が示すように，$|V| \lesssim 0.1\left|E_g/(B\ell)\right|$ となる。このウーファーを円筒の一端に固定し，他端から可動反射板を差し込んで気柱共鳴実験をするとしよう。上記の周波数帯でfの値を固定して，気柱の長さが音波の 1/4 波長 の奇数倍となる位置に反射板を近づけたとき，$\left|\dfrac{V}{E_g/(B\ell)}\right|$ の値が急激に 0.1 より大きくなれば，スピーカーの振動板表面を定常波の腹とする共鳴が生じたことになる。このようなことが起こり得るかどうかを次回に論じる。

文献 1　R.H.Small : Direct-Radiator Loudspeaker System Analysis,
IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics , vol. AU-19 (1971) , pp.269 - 281
文献 2　伊藤　毅　：　音響工学原論, コロナ社 (1974 , 第 10 版) pp.347 - 351
文献 3　http://www.jblproservice.com/pdf/Thiele Small Parameters/Thiele Parameters.pdf
この URL は削除された。

(注 1)

文献 1 では音響振動系のパラメーター (添字に A がつく) を用いて記述しているが, 慣れていない人にはわかりにくいので, 本稿では機械振動系のパラメーター (添字に M がつく) を用いて説明する。音響振動系では速度 v の代わりに体積速度 $u = S_{\mathrm{D}} v$ を用いるのが一般的である。このとき, 機械振動系のパラメーター $C_{\mathrm{MS}}, M_{\mathrm{MS}}, R_{\mathrm{MS}}$ とそれらに対応する音響振動系のパラメーター $C_{\mathrm{AS}}, M_{\mathrm{AS}}, R_{\mathrm{AS}}$ の間には, 次の関係式が成り立つ。

$$C_{\mathrm{AS}} = C_{\mathrm{MS}} S_{\mathrm{D}}^2 \ , \ M_{\mathrm{AS}} = M_{\mathrm{MS}} / S_{\mathrm{D}}^2 \ , \ R_{\mathrm{AS}} = R_{\mathrm{MS}} / S_{\mathrm{D}}^2$$

(注 2)

RLC 直列電気回路の Q 値を求める入試問題が関西大学 (1992) に見られる。機械回路でも求め方は同じで次のようになる。

式 (16) の分子を F_{g} とおけば, 式 (16) から,

$$|V| = \frac{|F_{\mathrm{g}}|}{\left| R_{\mathrm{MT}} + \mathrm{j}\left(\omega M_{\mathrm{MS}} - \frac{1}{\omega C_{\mathrm{MS}}} \right) \right|} = \frac{|F_{\mathrm{g}}|}{\sqrt{R_{\mathrm{MT}}^2 + \left(\omega M_{\mathrm{MS}} - \frac{1}{\omega C_{\mathrm{MS}}} \right)^2}}$$

を得る。F_{g} が ω に依存しない定数であれば,

$$\omega M_{\mathrm{MS}} - \frac{1}{\omega C_{\mathrm{MS}}} = 0 \ \Leftrightarrow \ \omega = \frac{1}{\sqrt{M_{\mathrm{MS}} C_{\mathrm{MS}}}} \equiv \omega_{\mathrm{S}} \qquad (イ)$$

のときに $|V|$ は極大値 $|V|_{\max} = |F_{\mathrm{g}}| / R_{\mathrm{MT}}$ をとる。図 (i) のように,

$|V| = |V|_{\max} / \sqrt{2}$ となるときの角振動数の値を

$\omega_{\pm} (0 < \omega_{-} < \omega_{+})$ とすれば, これらは,

$$\frac{|F_{\mathrm{g}}|}{\sqrt{R_{\mathrm{MT}}^2 + \left(\omega_{\pm} M_{\mathrm{MS}} - \frac{1}{\omega_{\pm} C_{\mathrm{MS}}} \right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{|F_{\mathrm{g}}|}{R_{\mathrm{MT}}}$$

$$\Leftrightarrow M_{\mathrm{MS}}^2 C_{\mathrm{MS}}^2 \omega_{\pm}^4 - (R_{\mathrm{MT}}^2 C_{\mathrm{MS}}^2 + 2 M_{\mathrm{MS}} C_{\mathrm{MS}}) \omega_{\pm}^2 + 1 = 0$$

を満たす。これを解けば,

$$\omega_{\pm} = \frac{\sqrt{R_{\mathrm{MT}}^2 C_{\mathrm{MS}}^2 + 4 M_{\mathrm{MS}} C_{\mathrm{MS}}} \pm R_{\mathrm{MT}} C_{\mathrm{MS}}}{2 M_{\mathrm{MS}} C_{\mathrm{MS}}} \qquad (ロ)$$

となる。このとき, 図 (i) の共振曲線の尖鋭度を次式で定義する。

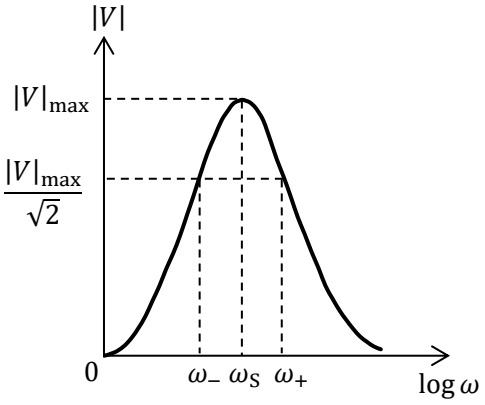


図 (i)

$$Q_{\mathrm{TS}} = \frac{\omega_{\mathrm{S}}}{\omega_{+} - \omega_{-}}$$

これに式 (ロ) と式 (イ) を代入すれば,

$$Q_{\mathrm{TS}} = \frac{\omega_{\mathrm{S}} M_{\mathrm{MS}}}{R_{\mathrm{MT}}} = \frac{1}{R_{\mathrm{MT}}} \sqrt{\frac{M_{\mathrm{MS}}}{C_{\mathrm{MS}}}} \qquad (ハ)$$

を得る。Q_{TS} の物理的意味を明らかにするために, 式 (ハ) の分子・分母に $\left(|V|_{\max} / \sqrt{2} \right)^2$ を掛ければ,

$$Q_{\mathrm{TS}} = 2\pi \frac{M_{\mathrm{MS}}\left(\frac{|V|_{\max}}{\sqrt{2}}\right)^2}{\frac{2\pi}{\omega_{\mathrm{S}}}\left(R_{\mathrm{MS}}+\frac{B^2\ell^2}{R_{\mathrm{g}}+R_{\mathrm{E}}}\right)\left(\frac{|V|_{\max}}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

となる。この分数式の分子は共振しているときのドライバーの力学的エネルギーで，分母は 1 回振動する間に，粘性抵抗と電気抵抗 $R_{\mathrm{E}}\left(R_{\mathrm{g}}=0\text{ を仮定}\right)$ によって失われるエネルギーの和であるから，$Q_{\mathrm{TS}}/2\pi$ は，ある瞬間のドライバーの力学的エネルギーがすべて粘性抵抗による発熱とジュール熱になるまでの振動回数を表す。すなわち，Q_{TS} は減衰の度合を表すパラメーターで，Q_{TS} が小さいほどドライバーの振動は減衰しやすく，大きいほど減衰が効かないので現状を維持しようとする傾向が強くなる。

(注 3)

図 4 で $R_{\mathrm{E}}=0$ としたとき，端子 AB から右側を見たときの電気インピーダンスを $Z_{\mathrm{ES}}(\mathrm{j}\omega)$ とすれば，

$$\frac{1}{Z_{\mathrm{ES}}(\mathrm{j}\omega)} = \frac{1}{R_{\mathrm{ES}}} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L_{\mathrm{CES}}} + \frac{1}{(\mathrm{j}\omega C_{\mathrm{MES}})^{-1}}$$

$$= \frac{1}{R_{\mathrm{ES}}} + \mathrm{j}\left(\omega C_{\mathrm{MES}} - \frac{1}{\omega L_{\mathrm{CES}}}\right)$$

$$\therefore \quad |Z_{\mathrm{ES}}(\mathrm{j}\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R_{\mathrm{ES}}}\right)^2+\left(\omega C_{\mathrm{MES}}-\frac{1}{\omega L_{\mathrm{CES}}}\right)^2}}$$

となる。この式より，

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L_{\mathrm{CES}}C_{\mathrm{MES}}}} = \frac{1}{\sqrt{M_{\mathrm{MS}}C_{\mathrm{MS}}}} = \omega_{\mathrm{S}}$$

のとき，$|Z_{\mathrm{ES}}| = |Z_{\mathrm{ES}}|_{\max} = R_{\mathrm{ES}}$ となり，$|I|$ は極小値 $|I|_{\min}$ をとる。ここで，
$|Z_{\mathrm{ES}}(\mathrm{j}\omega)| = |Z_{\mathrm{ES}}|_{\max}/\sqrt{2}$, したがって $|I| = \sqrt{2}\,|I|_{\min}$ となるときの角振動数の値を $\omega_{\pm}(0<\omega_{-}<\omega_{+})$ とすれば，これらは

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R_{\mathrm{ES}}}\right)^2+\left(\omega_{\pm}C_{\mathrm{MES}}-\frac{1}{\omega_{\pm}L_{\mathrm{CES}}}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,R_{\mathrm{ES}}$$

$$\Leftrightarrow \quad R_{\mathrm{ES}}^2\,L_{\mathrm{CES}}^2\,C_{\mathrm{MES}}^2\,\omega_{\pm}^4 - (2R_{\mathrm{ES}}^2\,L_{\mathrm{CES}}\,C_{\mathrm{MES}} + L_{\mathrm{CES}}^2)\omega_{\pm}^2 + R_{\mathrm{ES}}^2 = 0$$

を満たす。これを解けば，

$$\omega_{\pm} = \frac{\sqrt{L_{\mathrm{CES}}^2+4R_{\mathrm{ES}}^2L_{\mathrm{CES}}\,C_{\mathrm{MES}}}\pm L_{\mathrm{CES}}}{2R_{\mathrm{ES}}L_{\mathrm{CES}}\,C_{\mathrm{MES}}}$$

を得る。よって，共振しているときの尖鋭度 Q_{MS} は

$$Q_{\mathrm{MS}} = \frac{\omega_{\mathrm{S}}}{\omega_{+}-\omega_{-}} = \omega_{\mathrm{s}}C_{\mathrm{MES}}R_{\mathrm{ES}} \qquad (\text{ニ})$$

となる。$R_{\mathrm{E}}=0$, $R_{\mathrm{g}}=0$ として，図 4 を実際の電気回路と見れば，Q_{MS} の物理的意味は次のように

なる。式 (ニ) を

$$\frac{Q_{\mathrm{MS}}}{2\pi} = \frac{C_{\mathrm{MES}}\left|E_{\mathrm{g}}/\sqrt{2}\right|^2}{\frac{2\pi}{\omega_{\mathrm{S}}}\frac{\left|E_{\mathrm{g}}/\sqrt{2}\right|^2}{R_{\mathrm{ES}}}} \qquad (ホ)$$

と書き換えれば，右辺の分子はコイル L_{CES} とコンデンサー C_{MES} に蓄えられているエネルギーの和で，分母は一周期の間に抵抗 R_{ES} で発生するジュール熱である。よって，(注 2)の説明と同様に，Q_{MS} が大きいほど電気振動は減衰しにくく，小さいほど減衰しやすいと考えることができる。

これを機械振動系の用語で言い換えれば次のようになる。式 (ホ) は，

$$\frac{Q_{\mathrm{MS}}}{2\pi} = \frac{\omega_{\mathrm{S}}}{2\pi}\frac{M_{\mathrm{MS}}}{B^2 l^2}\frac{B^2\ell^2}{R_{\mathrm{MS}}} = \frac{M_{\mathrm{MS}}\left(|V|_{\max}/\sqrt{2}\right)^2}{\frac{2\pi}{\omega_{\mathrm{S}}}R_{\mathrm{MS}}\left(|V|_{\max}/\sqrt{2}\right)^2}$$

と書き換えられるので，$Q_{\mathrm{MS}}/2\pi$ は，ある瞬間のドライバーの力学的エネルギーが粘性抵抗によってすべて熱として失われるまでの振動回数を表す。

(注 4)

図 4 で $R_{\mathrm{ES}} = 0$ としたとき，端子 AB から右側を見たときの電気インピーダンスは，共振のときに発散し，$|I| = |I|_{\min} = 0$ となるので，ここではアドミッタンス (インピーダンスの逆数) $Y_{\mathrm{ES}}(\mathrm{j}\omega)$ で考える。

$$Y_{\mathrm{ES}}(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{|Z_{\mathrm{ES}}(\mathrm{j}\omega)|} = \frac{1}{R_{\mathrm{E}}+\left(\frac{1}{\mathrm{j}\omega L_{\mathrm{CES}}}+\mathrm{j}\omega C_{\mathrm{MES}}\right)^{-1}}$$

$$\therefore \quad |Y_{\mathrm{ES}}(\mathrm{j}\omega)| = \frac{1}{R_{\mathrm{E}}}\frac{\left|\omega C_{\mathrm{MES}}-\frac{1}{\omega L_{\mathrm{CES}}}\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{R_{\mathrm{E}}}\right)^2+\left(\omega C_{\mathrm{MES}}-\frac{1}{\omega L_{\mathrm{MES}}}\right)^2}}$$

であるので，$|Y_{\mathrm{ES}}(\mathrm{j}\omega)|$ のグラフは図 (ii) のようになる。

この図から $\omega_{\pm}$ を求めれば，

$$\omega_{\pm} = \frac{\sqrt{L_{\mathrm{CES}}^2+4R_{\mathrm{E}}^2L_{\mathrm{CES}}C_{\mathrm{MES}}}\pm L_{\mathrm{CES}}}{2R_{\mathrm{E}}L_{\mathrm{CES}}C_{\mathrm{MES}}}$$

となる。よって，共振しているときの尖鋭度 Q_{ES} は，

$$Q_{\mathrm{ES}} = \frac{\omega_{\mathrm{S}}}{\omega_+-\omega_-} = \omega_{\mathrm{s}}C_{\mathrm{MES}}R_{\mathrm{E}}$$

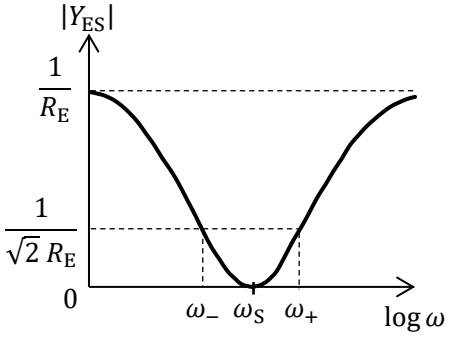


図　(ii)

となる。(注 3) と同様の計算をすれば，$Q_{\mathrm{ES}}/2\pi$ は，ある瞬間に電気回路に蓄えられていたエネルギーが，R_{E} で発生するジュール熱によってすべて系外に出ていくまでの振動回数を表すことがわかる。

「熱中物理」に掲載されている論文の要約 は こちらへ