弾性体棒を伝わる縦波の速さと固有音響インピーダンス

斉藤全弘

[1]　これから何回かに亘ってクントの実験について考察するが，その準備として表題にある物理量の導入とその表式について述べる。まずは次の入試問題から話を始める。

九州大学(2009 年度)

問 1 は省略

問 2　図 2 のように，質量 m の多数の物体を，質量が無視できるバネ定数 k の同じバネでつなぎ，なめらかな水平面上の直線(x軸)に沿って静止させる。このとき，各物体の間隔は d であり，左端から n 番目の物体の位置 x_n を $x_n = nd$ とする。次に，それぞれの物体を振幅 r ，角振動数 ω で x 方向に単振動させる。時刻 t において，n 番目の物体がはじめに静止していた位置 x_n からの変位を $u_n(t)$ とする。以下では，すべての物体の変位が図 3 に示すように波長 λ の正弦波上にあり，時間の経過にしたがって，この正弦波が x 軸の正の向きに進む場合を考える。このとき，λ は d にくらべて十分に大きく，物体に作用する力はバネによるもののみとする。

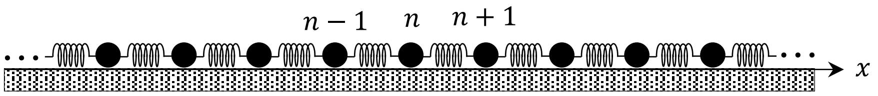

図　2

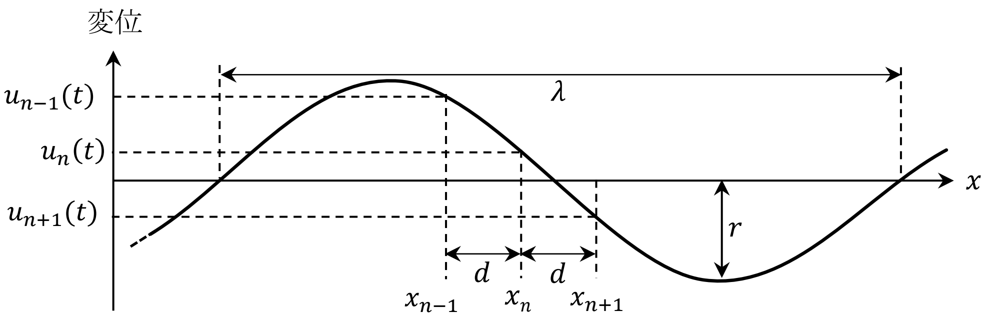

図　3

それぞれの物体の単振動は，等速円運動を直線上に投影した運動と考えてよい。いま，P 番目の物体についてみたところ，対応する等速円運動の回転角が ωt であり，単振動の変位は $u_P(t) = r\sin(\omega t)$ であった。このとき，$P-1$ 番目と $P+1$ 番目の物体に対応する等速円運動の回転角は，それぞれ [サ] と [シ] となり，$u_{P-1}(t) = r\sin($[サ]$)$ ，$u_{P+1}(t) = r\sin($[シ]$)$となる。時刻 t において，P 番目の物体の加速度は [ス] であり，P 番目の物体が左右のバネから受ける力の合力は [セ] $\times r\sin(\omega t)$であるので，この物体の運動方程式から，ω と λ の間には $\omega^2 =$ [ソ] の関係がある。

(解答)

(サ) 正弦波が伝わる速さ v は, $v = \lambda\omega/2\pi$ であり, $P-1$ 番目の物体の変位が P 番目の物体の変位 $u_P(t)$ と等しくなる時刻は t より伝播時間 d/v だけ前である。したがって, 時刻 t のとき対応する等速円運動の回転角(位相)は P 番目の物体の回転角(位相) ωt より $\omega d/v$ だけ進んでいる。すなわち,

$$(P-1)\ \text{番目の物体の回転角} = \omega\left(t+\frac{d}{v}\right) = \boxed{\omega t + 2\pi\frac{d}{\lambda}}$$

(シ) 同様に,

$$(P+1)\ \text{番目の物体の回転角} = \omega\left(t-\frac{d}{\lambda}\right) = \boxed{\omega t - 2\pi\frac{d}{\lambda}}$$

(ス) P 番目の物体の加速度 $a_P(t)$ は,

$$a_P(t) = -\omega^2\, u_P(t) = \boxed{-\omega^2\, r\sin\omega t} \qquad ①$$

(セ) P 番目の物体が左右のバネから受ける力の合力 $f_P(t)$ は,

$$f_P(t) = -k(u_P - u_{P-1}) + k(u_{P+1} - u_P)$$

$$= k\left\{r\sin\left(\omega t + 2\pi\frac{d}{\lambda}\right) + r\sin\left(\omega t - 2\pi\frac{d}{\lambda}\right) - 2r\sin(\omega t)\right\}$$

$$= -2k\left\{1-\cos\left(2\pi\frac{d}{\lambda}\right)\right\}\times r\sin\omega t$$

$$= \boxed{-4k\sin^2\left(\pi\frac{d}{\lambda}\right)}\ \times r\sin\omega t \qquad ②$$

(ソ) P 番目の物体の運動方程式 $ma_P(t) = f_P(t)$ に式①と式②を代入すれば, 次式を得る。

$$\omega^2 = \boxed{\frac{4k}{m}\sin^2\left(\pi\frac{d}{\lambda}\right)} \qquad ③$$

問題文にあるように, $d \ll \lambda$ であれば, 式③は,

$$\omega^2 = \frac{k}{m}\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\right)^2 = \frac{k}{m}(\kappa d)^2 \quad , \quad \text{ただし}\ \ \kappa = \frac{2\pi}{\lambda}\ \ (\text{波数}) \qquad ④$$

と近似することができ, 次の分散関係式 (ω と κ の間に成り立つ式) を得る。

$$\omega = d\sqrt{\frac{k}{m}}\kappa$$

この波の位相速度 v_{ph} と群速度 v_{g} は,

$$v_{\mathrm{ph}} = \frac{\omega}{\kappa} = d\sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad v_{\mathrm{g}} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\kappa} = d\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad ⑤$$

となり, 位相一定の波面が進行する速さ v_{ph} とエネルギーや情報が伝わる速さ v_{g} は同じである。

以上の結果を弾性体棒のなかを伝わる縦波の場合に拡張する。

長さ L , 断面積 S , 長さ方向の弾性定数 K の棒を考える。この棒を微視的に見たとき, 質量 m の微粒子が x , y , z のそれぞれの方向に距離 d だけ離れた隣の同質量の微粒子とバネ定数 k の

バネでつながれているとする。棒の $y\,z$ 断面上にある $N_{\mathrm{S}}\,(=S/d^2)$ 個の微粒子が x 方向（棒の長さ方向）に一斉に同じ運動をすると仮定すれば，この断面は質量 $N_{\mathrm{S}}m$ の板が隣の板とバネ定数 $N_{\mathrm{S}}k$（並列の合成バネ定数）のバネでつながれて振動するときと同じ振動をする。

いま，この棒の両端を逆向きに大きさ F の力で引っ張ったとき，棒が ΔL だけ伸びたとする。このとき微粒子間にある x 方向のバネが Δd だけ伸びたとすれば，

$$\Delta L = \left(\frac{L}{d}\right)\Delta d$$

$$K\Delta L = F = (N_{\mathrm{S}}k)\Delta d$$

が成り立つ。一方，この棒の密度を ρ とすると，$\rho = \dfrac{N_{\mathrm{S}}m}{Sd}$ と表される。

これらを用いれば，棒のなかを x 方向に伝わる縦波の速さは，式⑤より，

$$v = d\sqrt{\frac{k}{m}} = d\sqrt{\frac{N_{\mathrm{S}}k}{N_{\mathrm{S}}m}} = d\sqrt{\frac{K\frac{\Delta L}{\Delta d}}{\rho S d}} = d\sqrt{\frac{K\frac{L}{d}}{\rho S d}}$$

$$= \sqrt{\frac{KL}{\rho S}} \qquad ⑥$$

となる。あるいは，

単位面積当たりの力 $T = \dfrac{F}{S}$，　棒の伸び率 $\varepsilon = \dfrac{\Delta L}{L}$，　ヤング率 $E = \dfrac{T}{\varepsilon}$

を導入すれば，縦波の速さは，式⑥より，

$$v = \sqrt{\frac{\frac{F}{\Delta L}L}{\rho S}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{F}{S}\right)/\left(\frac{\Delta L}{L}\right)}{\rho}} = \sqrt{\frac{\frac{T}{\varepsilon}}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad ⑦$$

となり，棒の材質に固有な物理量（密度 ρ とヤング率 E）で決まることがわかる(注)。

ついでに，この波の強さを求めておく。

図 3 において，P 番目の物体の運動エネルギーは

$$\epsilon_{\mathrm{K}} = \frac{1}{2}m\dot{u}_P{}^2 = \frac{1}{2}m(r\omega)^2\cos^2\omega t$$

と表される。P 番目の物体の左側につながれているバネの伸びは

$$\Delta x_P = u_P - u_{P-1} = -2r\sin\left(\pi\frac{d}{\lambda}\right)\cos\left(\omega t + \pi\frac{d}{\lambda}\right)$$

であるから，そのバネの弾性エネルギーは

$$\epsilon_{\mathrm{P}} = \frac{1}{2}k\left(\Delta x_P\right)^2 = \frac{1}{2}k\left(2r\right)^2\sin^2\left(\pi\frac{d}{\lambda}\right)\cos^2\left(\omega t + \pi\frac{d}{\lambda}\right)$$

と表される。 $d \ll \lambda$ の場合，これら二つのエネルギーの和は，

$$\epsilon \ = \epsilon_{\mathrm{K}} + \epsilon_{\mathrm{P}} \ = \left\{ \frac{1}{2} m (r\omega)^2 + \frac{1}{2}\, k r^2 \left(2\pi \frac{d}{\lambda} \right)^2 \right\} \cos^2 \omega t$$

となる。式④を用いてエネルギー密度 $e \ = \ \epsilon / d$ の時間平均値を求めれば,

$$\bar{e} \ = \frac{m(r\omega)^2 \overline{\cos^2 \omega t}}{d} = \frac{m}{2d} (r\omega)^2$$

を得る。$\overline{\qquad\quad}$ は時間平均を表す。よって, x軸上のある点を単位時間当たりに通過するエネルギーは

$$i \ = \ \bar{e}\, v \ = \frac{m}{2d} (r\omega)^2 v \qquad ⑧$$

となる。弾性体棒の場合には, ある断面を単位時間当たり単位面積当たりに通過するエネルギー, すなわちこの縦波(音波)の強さは,

$$I = \frac{N_{\mathrm{S}} i}{S} \ = \frac{i}{d^2} \ = \frac{1}{2} \frac{m}{d^3} v (r\omega)^2 \ = \ \frac{1}{2} \rho v (r\omega)^2 \qquad ⑨$$

と表される。

[2] 境界面における縦波の振幅反射率と振幅透過率を求めるために, 次の入試問題を取り上げる。

東京工業大学(1994 年度)

(前問とのつながりを考慮して, いくつかの物理変数の記号を前問のものに統一してある。)

多数の質点が, たがいにばねによってつながれて, 直線状になっているものを考える。質点の質量を m , ばね定数を k とする。

平衡状態では, 図 1 (平衡状態) のように, すべての質点が静止していて, となりあう質点の間隔は d である。ある質点が直線に沿った方向に振動すると, それが音波などに見られる縦波 (疎密波) となって次々に他の質点に伝わっていく。その振動の様子は, 図 1 (振動状態) のように, 各質点の平衡状態での位置, $\bar{x}_n = nd$, からの変位, $u_n = x_n - \bar{x}_n$, の時間的変化によって表される。この媒質中を x の正方向に進む波は, たとえば, 時刻 t での変位,

$$u_n = A \sin(\omega t - \kappa\, \bar{x}_n) \qquad \cdots\cdots(1)$$

で表される。(ただし, $A > 0$, $\omega > 0$, $\kappa > 0$ とする。) 波長が d よりもずっと長い場合のみを考える事にすると, (1)式の波は連続な媒質を伝わっていくと考えてよい。その場合, 波の速さは

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}}\, d$$

で, また, (1)式の波が運ぶエネルギーは, 単位時間当たり

$$i = \frac{\omega^2}{2d} m v A^2$$

で与えられる。

(a) (1)式の波の波長と振動数を求めよ。

(b) 波の速さ v を (1)式の ω と κ で表せ。

つぎにばね定数 k，および質点の間隔 d が同じで，質点の質量が異なる $(M \neq m)$ 2つの媒質を図 2 のようにつないだものを考える。この媒質に上の (1)式で表される波が左から進入したとする。以下でも，波の波長は d に比べて十分長いものとせよ。

[A] 質量 M が m に比べて非常に大きいときには，入射波(1)は $x = 0$ で完全に反射される。反射波は入射波と重ね合わされて定常波ができた。

(c) この定常波における u_n $(n < 0)$ の時間的変化を入射波と反射波の重ね合わせとして表す式を求め，$\boxed{}$ を埋めよ。

$$u_n = \boxed{} + A\sin(\omega t - \kappa\,\bar{x}_n)$$

(d) この定常波の節はどこに出来るか？ $x \leqq 0$ の範囲で $x = 0$ に最も近い 2 つの節の位置 x を求めよ。波の波長は d の偶数倍であると仮定してよい。

[B] 質量 M が m に比べて非常に小さい時には，$x > 0$ には波を伝える媒質がないものと見なせる。$x = 0$ で反射された反射波は入射波と同じ振幅をもっている。

(e) この場合の u_n $(n < 0)$ を表す式を求め，$\boxed{}$ を埋めよ。

$$u_n = \boxed{} + A\sin(\omega t - \kappa\,\bar{x}_n)$$

[C] $M = 4m$ のとき，光の波がガラス面などに入射した時に起こるように，入射波の一部が反射されて振幅 B で x の負の向きに，残りは振幅 C で x の正の向きに伝わって行く。この時，$x = 0$ での波の変位の連続性の条件より，$A - B = C$ が成り立つ。ここで，A , B , C は正である。

(f) B と C を A で表せ。

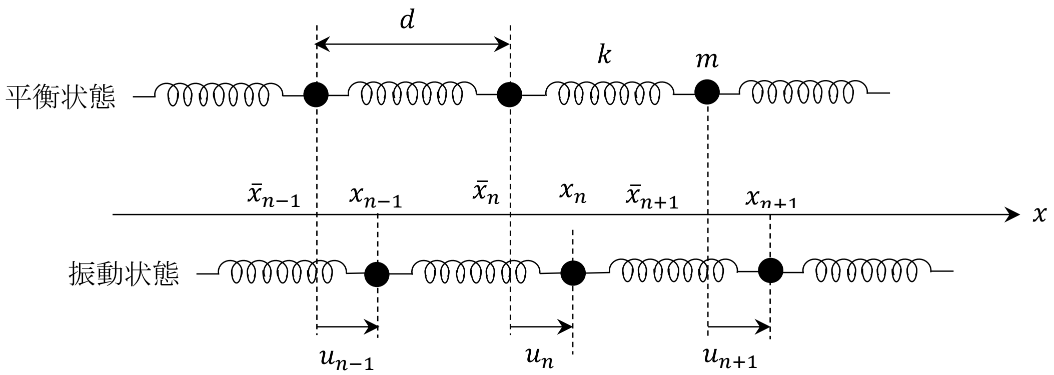

図 1

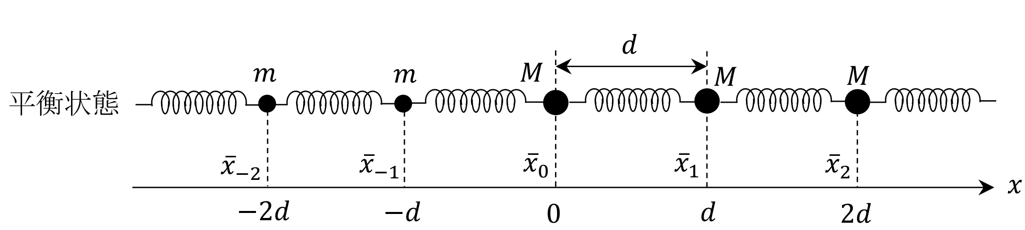

図 2

(解答)

(a) 波長 $\lambda = \boxed{\dfrac{2\pi}{\kappa}}$,　　振動数 $f = \boxed{\dfrac{\omega}{2\pi}}$

(b) 波の速さ $v = \lambda f = \boxed{\dfrac{\omega}{\kappa}}$

[A](c) 入射波と反射波と透過波による質点の変位をそれぞれ次のように記す。

$$u_{\mathrm{i}}(t\,,\bar{x}_n) = A\sin(\omega t - \kappa\,\bar{x}_n)\ ,\ u_{\mathrm{r}}(t\,,\bar{x}_n)\,,\ u_{\mathrm{t}}(t\,,\bar{x}_n)$$

$M \gg m$ の場合, $x = 0$ で入射波が完全に反射されるので,

$$u_{\mathrm{r}}(t\,,0) = -u_{\mathrm{i}}(t\,,0) = -A\sin(\omega t)$$

よって, 反射波による質点の変位は次のようになる。

$$u_{\mathrm{r}}(t\,,\bar{x}_n) = u_{\mathrm{r}}\left(t - \frac{-\bar{x}_n}{v}\,,0\right) = -A\sin\omega\left(t + \frac{\bar{x}_n}{v}\right)$$

$$= \boxed{-A\sin(\omega t + \kappa\,\bar{x}_n)}$$

(d) $\bar{x}_n$ ($\leqq 0$) での定常波による質点の変位は,

$$u(t\,,\bar{x}_n) = u_{\mathrm{i}}(t\,,\bar{x}_n) + u_{\mathrm{r}}(t\,,\bar{x}_n)$$

$$= 2A\sin(\kappa\,\bar{x}_n)\cos(\omega t)$$

となる。節の位置は, $\sin(\kappa\,\bar{x}_n) = 0$ より,

$$\bar{x}_n = j\frac{\pi}{\kappa}\qquad (j \text{ は整数})$$

よって, 求める位置は, $\boxed{0\ \text{と}\ -\pi/\kappa}$

[B](e) $M \ll m$ の場合, $x = 0$ で自由端反射をするので,

$$u_{\mathrm{r}}(t\,,0) = u_{\mathrm{i}}(t\,,0) = A\sin(\omega t)$$

よって, 反射波による質点の変位は,

$$u_{\mathrm{r}}(t\,,\bar{x}_n) = u_{\mathrm{r}}\left(t - \frac{-\bar{x}_n}{v}\,,0\right) = A\sin\omega\left(t + \frac{\bar{x}_n}{v}\right)$$

$$= \boxed{A\sin(\omega t + \kappa\,\bar{x}_n)}$$

因みに, 定常波による質点の変位は,

$$u(t\,,\bar{x}_n) = 2A\cos(\kappa\,\bar{x}_n)\sin(\omega t)$$

[C](f) $M = 4m$ の場合には, 入射波の一部が $x = 0$ で固定端反射をし, 残りが $x > 0$ へ透過するので,

$$u_{\mathrm{i}}(t\,,\bar{x}_n) = A\sin(\omega t - \kappa\,\bar{x}_n)\,,$$

$$u_{\mathrm{r}}(t\,,\bar{x}_n) = -B\sin(\omega t + \kappa\,\bar{x}_n)\ ,\ u_{\mathrm{t}}(t\,,\bar{x}_n) = C\sin(\omega t - \kappa\,\bar{x}_n)$$

と表される。境界面 $x = 0$ での質点の変位の連続性より,

$$u_{\mathrm{i}}(t\,,0) + u_{\mathrm{r}}(t\,,0) = u_{\mathrm{t}}(t\,,0)$$

$$\therefore\ A - B = C \qquad ⑩$$

境界面 $x = 0$ では, 単位時間あたりの入射エネルギーと出射エネルギーが等しいので,

$$i_{\mathrm{i}} = i_{\mathrm{r}} + i_{\mathrm{t}}$$

が成り立つ。透過波の速さをVとすれば，問題文にあるiの表式より，

$$\frac{\omega^2}{2d}mvA^2 = \frac{\omega^2}{2d}mvB^2 + \frac{\omega^2}{2d}MVC^2 \qquad ⑪$$

$$\therefore\ \mathrm{A}^2 - B^2 = \frac{MV}{mv}C^2 \qquad ⑫$$

式⑨と式⑩より，

$$\frac{B}{A} = \frac{MV-mv}{MV+mv} \quad , \quad \frac{C}{A} = \frac{2mv}{MV+mv} \qquad ⑬$$

を得る。一方，波の速さは次式で与えられる。

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}}d \quad , \quad V = \sqrt{\frac{k}{M}}d$$

よって，$M = 4m$であれば，$v = 2V$を満たす。これらを式⑬に代入すれば，次式を得る。

$$\frac{B}{A} = \boxed{\frac{1}{3}}, \quad \frac{C}{A} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

以上の結果を，材質が異なる2本の長い弾性体棒を$x = 0$で接続した場合に拡張する。棒の場合でも式⑩はそのままで成り立つが，式⑪のエネルギー保存則は，式⑨を用いて，

$$\frac{1}{2}\rho v(A\omega)^2 = \frac{1}{2}\rho v(B\omega)^2 + \frac{1}{2}\rho' v'(C\omega)^2$$

と書き換えなければならない。ただし，ρとvは入射側での密度と波の速さで，ρ'とv'は透過側での密度と波の速さである。ここからは（解答）と同様の計算をすれば，式⑬に相当する次の式を得る。

$$\text{振幅反射率} \quad \frac{B}{A} = \frac{\rho' v' - \rho v}{\rho' v' + \rho v} \qquad ⑭$$

$$\text{振幅透過率} \quad \frac{C}{A} = \frac{2\rho v}{\rho' v' + \rho v} \qquad ⑮$$

これらより，$A > 0$とすれば，

$\rho' v' = \rho v$ のとき，$B = 0$，$C = A$：　波は反射せずに完全に透過する。

$\rho' v' > \rho v$ のとき，$B > 0$，$C > 0$：　反射によって位相がπだけずれる。

$\rho' v' < \rho v$ のとき，$B < 0$，$C > 0$：　反射による位相のずれはない。

弾性体棒に固有な物理量ρvをその弾性体棒の固有(あるいは特性，あるいは比)音響インピーダンスという。この名称の由来については次々回に説明する。

式⑭，⑮の応用例としては次のようなものがある。超音波を用いて金属内部の傷を探る超音波探傷検査や人体内部の臓器の様子を調べる医療超音波検査などは，2つの物体の境界面で固有音響インピーダンスが不連続的に変化することを利用している。逆に，超音波診断のとき探触子(probe)の先端にゼリーを塗り付けるのは，探触子と皮膚との接触面における固有音響インピーダ

ンスの差を小さくして，超音波を効率的に体内へ送り込むようにするためである。このような応用のほかに，空気と水の固有音響インピーダンスの値を計算すれば，なぜ音波が空気中から水中へ伝わりにくいのかがわかる。気柱共鳴との関係については次々回に詳述する。

(注)

この式は太さが波長に比べて十分小さな弾性体棒のなかを中心軸方向に伝わる縦波に対して適用できる。波長に比べて十分大きな弾性体の場合には，縦波がある方向に伝わると，それに垂直な方向に媒質の変位が生じ，周囲の媒質からせん断応力を受ける。そのために横波が発生する。その影響も考慮して縦波の速さを求めれば，等方的な弾性体の場合，

$$v = \sqrt{\frac{E(1-\sigma)}{\rho(1+\sigma)(1-2\sigma)}}$$

となる。σ はポアソン比で，弾性体棒に張力を加えて引き伸ばしたとき，軸方向の伸び率を α，それに垂直な方向の縮み率を β として，

$$\sigma = \frac{\beta}{\alpha}$$

で定義される。多くの物質では $\sigma = \frac{1}{3} \sim \frac{1}{4}$ の値をとる。

弾性体棒の場合にも中心軸に垂直な方向に媒質が変位するが，棒の側面が膨らんだり縮んだりするだけで，そのとき空気がおよぼす応力は無視できる。

「熱中物理」に掲載されている論文の要約 は こちらへ