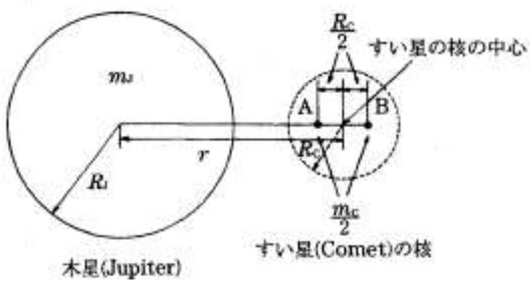
潮 汐 力 に つ い て

斉藤全弘

[1]　大学入試も世相を反映し，その時点でマスコミをにぎわした物理現象が入試問題に取り上げられることがある。次の名古屋工業大学(1995 年)の問題はその一例である。

昨年，木星に衝突したシューメーカー・レビーすい星は，太陽の引力に捕えられて太陽を周回した後，木星の引力の影響を受け，木星の衛星となったと考えられている。さらに，木星を周回中，木星に非常に近づいたため，その核(尾を除いたすい星の本体)が複数に分裂し，最終的に木星に衝突したとされている。

問 1 と問 2 は省略



問 3　すい星の核が木星に極端に近づくと，すい星の核がばらばらに分裂してしまうことがある。ここでは，半径 R_{C}，質量 m_{C} のすい星の核の構造を，質量 $\dfrac{m_{\mathrm{C}}}{2}$ の2 つの質点 A，B が図のように，木星の中心とすい星の核の中心を結ぶ直線上に R_{C} だけ離れて並んだものであると見なす。ただし，木星の半径と質量はそれぞれ R_{J} および m_{J} であるとする。

(1)　質点 A，B に働く木星からの万有引力の大きさをそれぞれ F_1，F_2，質点 A，B 間の引力の大きさを F_{G} としたとき，質点 A，B に働く合力 F_{A}，F_{B} を F_1，F_2，F_{G} で表せ。ただし，すい星から木星に向かう方向を正とする。

(2)　$F_{\mathrm{A}} > F_{\mathrm{B}}$ のとき，核は分裂するとして，そのときの r の条件式を m_{J}，m_{C}，R_{C} を用いて表せ。ただし，すい星の核の半径 R_{C} と木星の中心からすい星の核の中心までの距離 r の比 $\alpha = \dfrac{R_{\mathrm{C}}}{r}$ が 1 より十分小さいと仮定し，$\dfrac{1}{(1 \pm c\alpha)^2} = 1 \mp 2c\alpha$ (複号同順，c は定数)を用いて式をまとめよ。

(3)　木星とすい星の核の平均密度(星の質量÷星の体積)が等しいとして，(2)で求めた条件を r と R_{J} の不等式で示せ。

解答は容易で，次のようになる。

問 3　(1)　$F_{\mathrm{A}} = F_1 - F_{\mathrm{G}}$，　$F_{\mathrm{B}} = F_2 + F_{\mathrm{G}}$

(2)　核が分裂する条件 $F_{\mathrm{A}} > F_{\mathrm{B}}$ は，

$$F_1 - F_2 > 2F_{\mathrm{G}} \qquad \text{——— (a)}$$

と書き換えられる。一方，万有引力の法則と近似式を用いれば，

$$F_1 = G\ \frac{m_{\mathrm{J}}(m_{\mathrm{C}}/2)}{(r - R_{\mathrm{C}}/2)^2} = \frac{G\ m_{\mathrm{J}} m_{\mathrm{C}}}{2r^2}\left(1 - \frac{R_{\mathrm{C}}}{2r}\right)^{-2} \fallingdotseq \frac{G\ m_{\mathrm{J}} m_{\mathrm{C}}}{2r^2}\left(1 + \frac{R_{\mathrm{C}}}{r}\right),$$

$$F_2 \fallingdotseq \frac{G\ m_{\mathrm{J}} m_{\mathrm{C}}}{2r^2}\left(1 - \frac{R_{\mathrm{C}}}{r}\right),\quad F_{\mathrm{G}} = G\ \frac{(m_{\mathrm{C}}/2)^2}{{R_{\mathrm{C}}}^2}$$

と表される。これらを式(a)に代入すれば，

$$\frac{G\ m_{\mathrm{J}} m_{\mathrm{C}} R_{\mathrm{C}}}{r^3} > \frac{G{m_{\mathrm{C}}}^2}{2{R_{\mathrm{C}}}^2} \qquad \therefore\ r < R_{\mathrm{C}}\left(\frac{2\ m_{\mathrm{J}}}{m_{\mathrm{C}}}\right)^{1/3} \qquad \text{———(b)}$$

となる。

(注) 天体が周囲の物体におよぼす万有引力の差分 $F_1 - F_2$ を潮汐力(または起潮力)という。潮汐を論じるとき，単位質量あたりの力を用いることが多い。その場合には，

$$\frac{F_1 - F_2}{m_{\mathrm{C}}/2} = \frac{2G\ m_{\mathrm{J}} R_{\mathrm{C}}}{r^3}$$

を潮汐力と言ってもよい。

(3) 木星とすい星の平均密度が等しいとすると，

$$R_{\mathrm{C}} = R_{\mathrm{J}}\left(\frac{m_{\mathrm{C}}}{m_{\mathrm{J}}}\right)^{1/3}$$

が成り立つ。これを式(b)に代入すると，

$$r < 2^{1/3} R_{\mathrm{J}} = 1.26\ R_{\mathrm{J}} \qquad \text{———(c)}$$

となる。

(注) 式(c)の右辺をロッシュ限界という。ロッシュ限界を越えて木星に近づくと，すい星は分裂する。ただし，すい星と木星の平均密度が同じで，すい星は万有引力だけで固まっているという条件があることを忘れてはならない。ロッシュ限界の数値係数はすい星の軌道と構造に依存し，円軌道で非圧縮性流体であれば，2.45 になる。

このような簡単な計算で，潮汐力やロッシュ限界の核心部分を理解することができるのである。

地球で観測される潮汐現象が物理の問題として取り上げられたことがあるのかどうか不明であるが，潮汐力をめぐる論争で気になる点があるので，以下それについて述べる。

[2] まず，赤道上にある物体の宇宙空間内での軌道を数式で表す。図 1 のように，地球(質量M，半径R) と月 (質量M') の重心をGとし，両者の中心 C，C′ を通る直線と地表が交わる点のうち，月に近い方をN，遠い方をFとする。 $\overline{\mathrm{CC'}} = d$，$\overline{\mathrm{CG}} = r$ とすれば，

$$r = \frac{M'}{M + M'}\ d \qquad ①$$

$$= 4.67 \times 10^6\ \mathrm{m} = 0.732\ R$$

である。数値計算では，$M = 5.97 \times 10^{24}\ \mathrm{kg}$，$M' = 7.35 \times 10^{22}\ \mathrm{kg} = 0.0123\ M$，$R = 6.38 \times 10^6\ \mathrm{m}$，$d = 3.84 \times 10^8\ \mathrm{m} = 60.2\ R$ を用いた。

本稿では太陽が地球・月系におよぼす重力を無視する。重心G のまわりを等速円運動する地球と月の角速度をωとすれば，地球の運動方程式より，

$$r\omega^2 = \frac{GM'}{d^2} \qquad ②$$

が成り立ち，式①を用いれば，

$$\omega = \sqrt{\frac{G(M+M')}{d^3}} \qquad ③$$

となる。$\omega = 2.67 \times 10^{-6}$ rad/s で，周期 Tは$2\pi/\omega = 27.3$ 日（恒星月）である。

慣性系 $\mathrm{G}-XY$ から見たときの地球の自転角速度をω_0 とし，自転軸は軌道面に垂直とする。図 1 のように，G を原点として角速度 ω で左まわりに回転する座標系を$\mathrm{G}-xy$ とし，時刻 $t=0$ のとき，$\mathrm{G}-xy$ は $\mathrm{G}-XY$ に重なっており，C と C′ はx軸上にあるものとする。

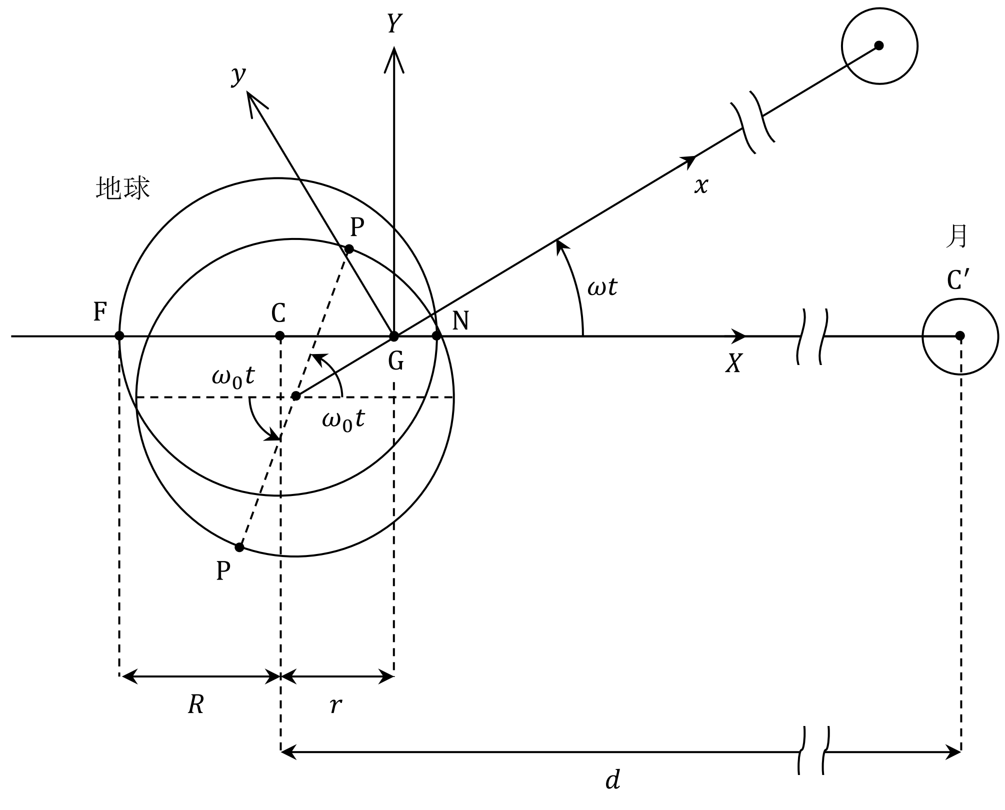


図 1

慣性系 $\mathrm{G}-XY$ において，$t=0$ のときN 点（F 点）にあった海水P の時刻 t での位置は，

$$X = \pm R\cos\omega_0 t - r\cos\omega t \ , \quad Y = \pm R\sin\omega_0 t - r\sin\omega t \qquad ④$$

と表される。ただし，潮流はないとしている。複号は上がN点に，下がF点にあったP の位置を表す。以下同様である。この位置を回転座標系 $\mathrm{G}-xy$ で見ると，

$$\left.\begin{array}{l} x = X\cos\omega\, t + Y\sin\omega\, t = -r \pm R\cos(\omega_0 - \omega)\, t \\ y = -X\sin\omega\, t + Y\cos\omega\, t = \pm R\sin(\omega_0 - \omega)\, t \end{array}\right\} \quad ⑤$$

となる。すなわち，C 点を中心とする半径 R の円周上を角速度 $\omega_0 - \omega$ で，左まわりに回転する。

つぎに，地球が自転していない場合 $(\omega_0 = 0)$ を考えると，式④より，

$$X = \pm R - r\cos\omega\, t \ , \quad Y = -r\sin\omega\, t \quad ⑥$$

となる。すなわち，慣性系 $\mathrm{G}-XY$ で見ると，P は点 $\mathrm{O}(\pm R\,, 0\,)$ を中心とする半径 r の円周上を角速度 ω で左まわりに回転する。

[3]　話を簡単にするために，N点とF点にある海水だけを考え，N点で海水が上昇するとき，F点でも海水が上昇することを示す(文献 1)。いまかりに月がないと仮定したとき，N 点 (F 点) にある質量 m の海水P が周囲の海水から受ける鉛直上向きの力をmf とし，月があるときには $m(f - \Delta f)$ になるとする。このように f と Δf を定義すると，月がないときと比べ，月があることによって単位質量あたりΔf の力で海水P が鉛直上向きに引っぱられると解釈することができる。月がないとしたときの地球の自転をどのように設定するのか，また，どのような状況にあるP を考えるのかによって，Δf を表す数式は異なるし，同じ状況でも，採用する座標軸によって計算式が違ってくる。話がややこしくなる原因はここにある。

(A)　最初の事例として，大多数の人が想定しているもっとも単純な状況から話を始める。まず，月がないときも，またあるときも，地球は自転していない$(\omega_0 = 0)$ とする。月がないとき，慣性系に対してP は静止しているのだから，

$$0 = mf - G\ \frac{mM}{R^2} \quad \therefore\ f = \frac{GM}{R^2} \quad ⑦$$

が成り立つ。月が重心 G のまわりを角速度 ω で回転している場合には，[2]で示したように，P は慣性系 $\mathrm{G}-XY$ において，式⑥で表される等速円運動をしている。したがって，慣性系から見れば，N 点 (F 点) を通過しつつある海水P の運動方程式の向心成分は，

$$m \cdot r\omega^2 = \pm m(f - \Delta f) \mp G\ \frac{mM}{R^2}\ + G\ \frac{mM'}{(d \mp R)^2} \quad ⑧$$

と表される。式②，⑦を式⑧に代入し，$R \ll d$ に注意して近似計算をすれば，

$$\frac{GM'}{d^2} = \pm\ \frac{GM}{R^2} \mp \Delta f\ \mp\ \frac{GM}{R^2}\ +\ \frac{GM'}{d^2}\ \left(1 \pm \frac{2R}{d}\right)$$

$$\therefore\ \Delta f = \frac{2GM'R}{d^3} \quad ⑨$$

を得る。すなわち，N 点にある海水が式⑨の力で盛り上がるとき，F 点にある海水も同じ力で盛り上がることになる。

上の計算では運動方程式を立てたが，潮汐力を論じる人の多くは，次のような方法で式⑨を導出する。

まず，海水ではなくN 点 (F 点) に浮遊する単位質量の物体を考え，$f - \Delta f$ を0 とする。つぎに，

地球の重力は潮汐現象に寄与しないので無視する。さらに，角速度 ω で回転する座標系に乗ることによって遠心力 $r\omega^2$ を導入する(図 2 参照)。地球の中心ではこの遠心力と月の重力がつりあう。これを用いてN 点 (F 点) で遠心力と月の重力の合力(式⑧の左辺と右辺第 3 項の差)を求めると，式⑨の右辺を得る。そして，この合力の向きに浮遊物体が運動を始め，潮汐現象が生じる，という論法である。

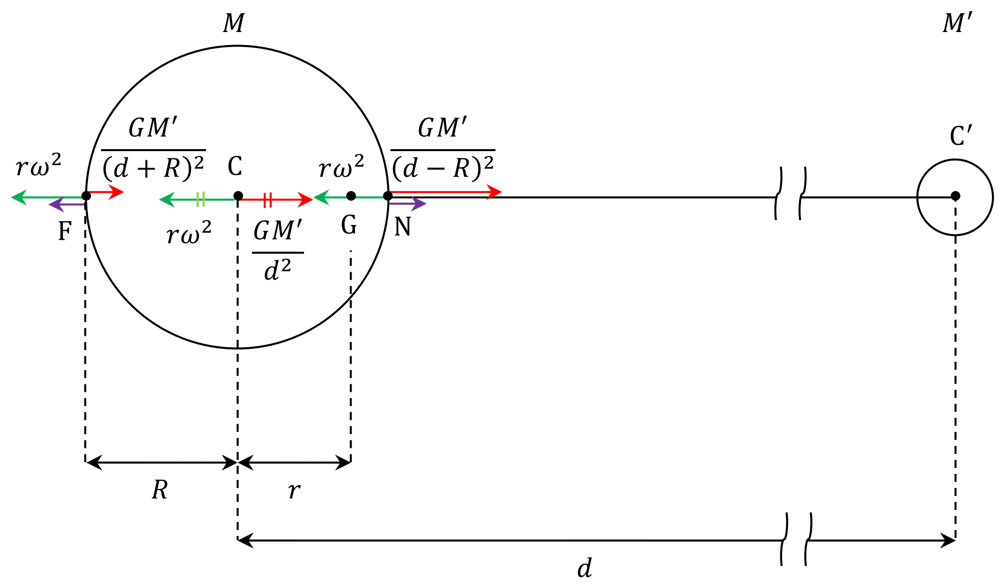


図 2

地球と月が重心 G のまわりを角速度 ω で公転し，地球が自転していない場合において，N，C，F の各点にある単位質量の物体と共に，半径 r，角速度 ωで円運動する観測者から見たときに，各物体に働く力。ただし，地球の重力は潮汐に寄与しないので省いてある。

→ は月の重力　← は遠心力　⇄ は合力（潮汐力）

高校「地学」の教科書では，数式を使わずに図で説明する。その際，重心 G のまわりの地球の公転による遠心力は，「地球のどの位置でも大きさ・向きが等しい」と一方的に言い切ってしまう。間違ってはいないのだが，これが正しいのは地球が自転していないときである。教科書には自転についての記述はない。記述すれば藪蛇になるからであろう。地球が自転していないときに，なぜ遠心力の大きさと向きがどこでも同じになるのかを高校生に説明するのは骨が折れる。

図 3 の破線の円軌道が示すように，物体が地球のどの位置にあっても，円運動の半径 r と角速度 ω は同じであるのだが，その回転中心は物体によって異なる。それぞれの円運動に乗ってそれぞれの物体を見れば，図 3 の $t=0$ の瞬間において，遠心力はすべて左向きになるのである。

地学を選択する高校生は理解に苦しんでいるのではないだろうか。

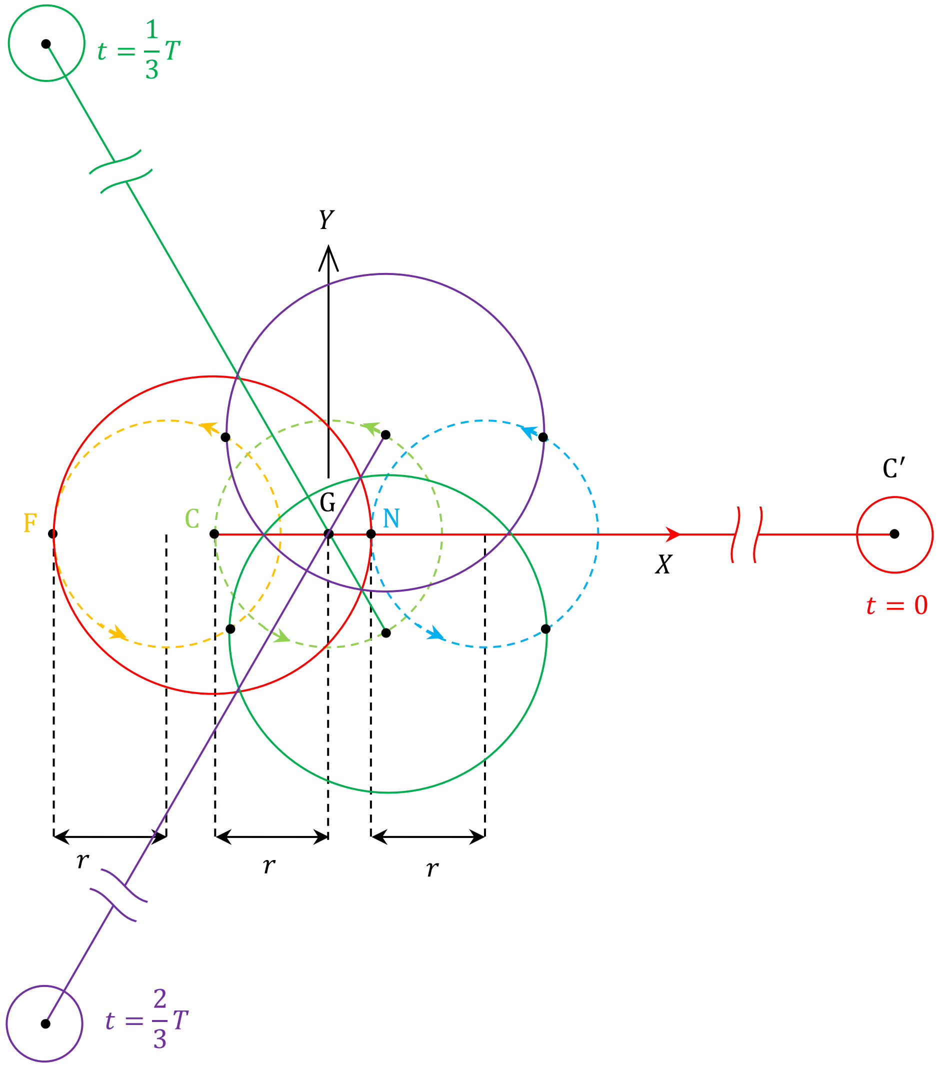


図 3

地球が自転していない場合において，慣性系に立つ観測者が，$t=0$ のときに F，C，N の各点にあった物体を見れば，破線の円周上を角速度 ω で回転運動する。$\frac{1}{3}$周期ずれた地球と月の位置を，色を変えて示してある。

[B]　二つ目の事例として，地球が角速度 ω_0 で自転している場合を考える。まず，月がないとすると，慣性系から見た赤道上の海水P の運動方程式より，

$$f=\frac{GM}{R^2}-R{\omega_0}^2 \quad ⑩$$

を得る。つぎに，月があるとき回転座標系 $\mathrm{G}-xy$ から見ると，[2]で述べたように，P は C 点を中心

とする半径 R の円周上を角速度 $\omega_0 - \omega$ で回転する。したがって，P がN 点（F 点）を通過するときの運動方程式の向心成分は，

$$m \cdot R(\omega_0 - \omega)^2 = -m(f - \Delta f) + G\ \frac{mM}{R^2}\ \mp G\ \frac{mM'}{(d \mp R)^2} \\ -m(R \mp r)\,\omega^2 - 2m\omega \cdot R(\omega_0 - \omega) \qquad ⑪$$

となる。右辺第 4 項と第 5 項は，回転座標系から見ることによって生じる遠心力とコリオリ力である。事例(A)と同様の計算をすれば，

$$\Delta f = \frac{2GM'R}{d^3} \qquad ⑫$$

を得る。地球が自転している場合は，していない場合と比べて，f の値は変わるが，Δfの値はω_0に依らず，$\omega_0 = 0$ のときの式⑨と同じになる。

(C) 三つ目の事例では，事例(B)と状況は同じであるが，異なる座標軸を採用する。重心 G のまわりを角速度 ω で回転するC 点を原点とし，座標軸は慣性系の$X - Y$ 軸に平行で回転しないとする。このとき，P は C 点を中心とする半径 R の円周上を角速度 ω_0 で回転する。したがって，C 点から見て，P がN 点（F 点）を通過するときの運動方程式の向心成分は，

$$m \cdot R{\omega_0}^2 = -m(f - \Delta f) + G\ \frac{mM}{R^2}\ \mp G\ \frac{mM'}{(d \mp R)^2}\ \pm mr\omega^2 \qquad ⑬$$

となる。右辺第 4 項は，原点C が慣性系に対してC からG の向きに大きさ$r\omega^2$ の加速度で円運動することに起因する慣性力である。

事例(B)と同様の計算をすれば，式⑫を得る。状況が同じであれば，Δf は座標軸の設定の仕方に依存しないはずだから，これは当然の結果である。事例(B)と(C)の座標軸の違いについては，筆者の別の解説記事「静止とはなにか」を見ていただきたい。

(D) 最後の事例では，事例(A)～(C)とは異なる状況でΔf を計算してみよう。まず，月があるとき，地球の自転角速度 ω_0 が重心 G のまわりの公転角速度 ω に等しくなっているとする。すなわち，地球と月は互いに同じ面を向けて重心のまわりを公転している状態(tidal locking の状態)にあるとする。このとき，回転座標系 $\mathrm{G} - xy$ から見れば，N 点（F 点）にある海水 P は静止している。P に働く力のつりあいの式は，式⑪で$\omega_0 = \omega$ とおけば，

$$0 = -m(f - \Delta f) + G\ \frac{mM}{R^2}\ \mp G\ \frac{mM'}{(d \mp R)^2}\ -m(R \mp r)\omega^2 \qquad ⑭$$

となる。月がないときも地球が同じ角速度 ω で自転しているとすると，

$$f = \frac{GM}{R^2}\ -R\omega^2$$

となり，事例(B)で述べたように，$\Delta f = 2GM'R/d^3$ となる。そこで，月がないとき地球が自転していないとすると，

$$f = \frac{GM}{R^2}$$

であるから，これと式②を用いて式⑭から$\varDelta f$を求めれば，

$$\varDelta f = \frac{G(M+3M')R}{d^3} \qquad ⑮$$

となる。

式⑮は次のような考え方で導出してもよい。回転座標系 $\mathrm{G}-xy$ に立つ観測者が，N 点（F 点）に浮遊する単位質量の物体に着目し，地球がおよぼす重力を無視すれば，この物体に働く力の大きさは式⑭の右辺第 3 項と第 4 項の和の大きさ，すなわち式⑮の右辺となる。この力によって浮遊物体は鉛直上向きに動き始める。したがって，N 点が満潮のときF 点も満潮になる。

ところで，式⑮で$M' \to 0$ の極限を考えると，$\varDelta f \to GMR/d^3 = R\omega^2$ となる。この点を捉えて，文献(2)の著者である半田利弘氏は，「これはあまりに奇妙な結果ではないだろうか」と批判する。月がないときに潮汐力が働くのはおかしいと言うのである。しかし，我々はいま角速度 ω で地球が自転している場合を考察しているのであるから，赤道上のどこでも海水に対して遠心力$R\omega^2$ が働くのは当然のことであり，奇妙ではない(注 1)。この遠心力を取り除いた部分が潮汐現象の原因となっているのである。と言っても，式⑮の第 2 項 $3GM'R/d^3$ が潮汐力となるわけではない。地球の自転がない場合には，新たに事例(A)に立ち返る必要があり，潮汐力は $2GM'R/d^3$ である。

半田氏の指摘に対する筆者の意見は次のとおりである。潮汐現象の原因が月の重力$F(r)$ の差分$\varDelta F \fallingdotseq \dfrac{\partial F}{\partial r}\varDelta r$ であることは明白であり，式⑮は遠心力が潮汐現象の原因の一つであると主張すものではない。海水がN 点で上昇するとき F 点でも上昇することを，式⑮でも説明できると言っているにすぎない。念のため，筆者は式⑮を潮汐力とは呼んでいないことを書き添えておく。

半田氏以外にも，事例(D)が間違っていると指摘する人がいる。文献(3)の著者である松田卓也氏は，図 4 のようなベクトル図を書いて，月の重力と遠心力の合力はN 点とF 点で大きさが異なってしまうはずだから，潮汐力を正しく説明できない，と言うのである。

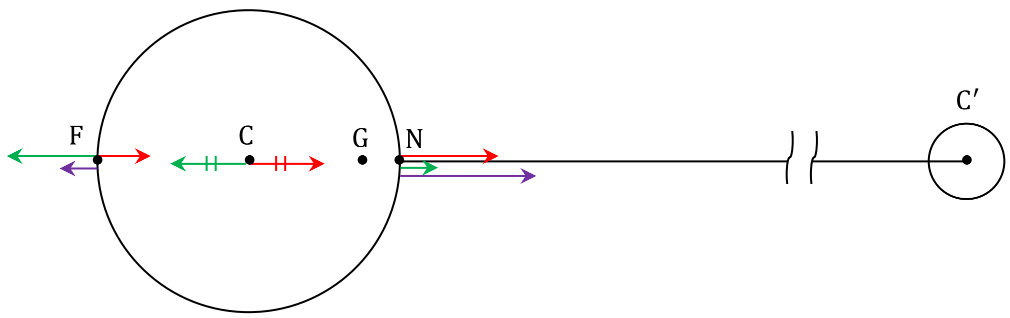


図　4　　松田氏の主張

→ は月の重力　⇄ は遠心力　⇄ は合力(潮汐力)

しかし，これは松田氏の勇み足である。$R \ll d$ である限り，式⑮が示すように，N 点とF 点での合力の大きさは等しい。実際，地球・月系で数値計算をすると，図 5 のようになっている。

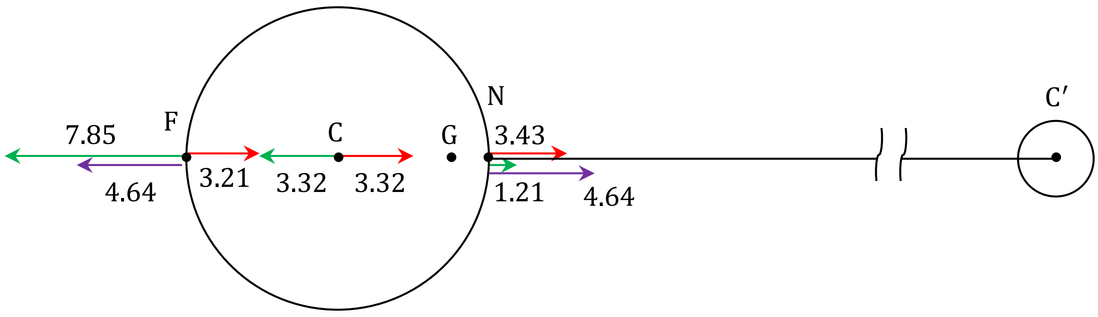


図　5

地球と月が重心 G のまわりに角速度 ω で公転し，地球が角速度 ω で自転している場合において，G のまわりに角速度 ω で回転する座標系に立っている観測者が見たとき，F，C，N の各点にある浮遊物体に働く単位質量あたりの力。単位は10^{-5} m/s^2 である。ただし，地球の重力は潮汐に寄与しないので省いてある。

→ は月の重力　⇄ は遠心力　⇄ は合力

この勇み足は差し置いて，事例(D)から出発しても，次のような手順を踏めば，事例(A)の結果と同じになる，と松田氏は言う。

重心 G のまわりに角速度 $\vec{\omega}$ で回転する座標系に乗って見たとき，赤道上の各点で地表に対して静止している単位質量の物体に働く遠心力は，

$$-\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\overrightarrow{\mathrm{GP}}) = -\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\overrightarrow{\mathrm{CP}}) + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\overrightarrow{\mathrm{CG}})$$
$$= \omega^2\vec{R} - \omega^2\,\vec{r}$$

と表せる(図 6 参照)。右辺第 1 項の力は，地球の重力 $-\dfrac{GM}{R^3}\,\vec{R}$ に組み込むことができるので，潮汐には寄与しない。第 2 項の力は図 6 で左向きに一定の力となり，事例(A)で導入した遠心力と一致する。

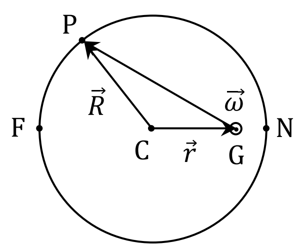


図　6　$\overrightarrow{\mathrm{GP}} = \overrightarrow{\mathrm{CP}} - \overrightarrow{\mathrm{CG}}$

この指摘は筆者にとってはコロンブスの卵であった。

本稿に出てきた数式で言い換えると，次のようになる。式⑭を書き換えれば，

$$0 = -(f - \Delta f) + \left(\frac{GM}{R^2} - R\omega^2\right) \mp \frac{GM'}{(d\mp R)^2}\ \pm r\omega^2 \qquad ⑯$$

となる。遠心力の一部 $(-R\omega^2)$ を第 2 項の地球の重力に組み込むと考えるのではなく，

$f = \dfrac{GM}{R^2}\ -R\omega^2$ となるように，月がないとき地球が角速度 ω で自転している状態であった，と考え直すのである。これは事例(B)の特殊な場合であり，

$$\Delta f = \pm\frac{GM'}{(d\mp R)^2}\ \mp r\omega^2 = \frac{2GM'R}{d^3}$$

となる。$-\Delta f$ をN点 (F 点)に浮遊する単位質量の物体に働く地球の重力以外の力の合力と解釈すれば，この物体には，月の重力とGからCの向きの遠心力 $r\omega^2$ が働いていることになる。式⑯では，N点 (F 点)にある物体に働く力は $\text{N} \rightarrow \text{C}(\text{F} \rightarrow \text{C})$ の向きを正としていることに注意されたい。

文献(1)　地球の全表面に亘る潮汐についての概要を知りたい人には，

斎藤基彦「潮汐の話」 数理科学 No.588，June2012，pp.7～13

がお薦めです。たった 6 頁の解説文ですが，潮汐論の歴史から潮汐平衡論および潮汐の時間変化，さらに土星の輪についてまで，簡潔に記述されています。同じ内容のものは，「斎藤基彦のホームページ」の「潮の満ち干」(2007/6/19)から入手できます。

文献(2)　半田利弘「潮汐力は共通重心周りの遠心力で起こるのではない」

天文月報 2005 年 7 月号

「2010 年 6 月 6 日に表式など一部訂正したもの」が，「潮汐力」で検索すれば入手できます。筆者は訂正したものしか読んでいません。

注(1)　半田氏は，式⑮に相当する式を導くとき，地球の自転については言及していないが，後の方で，「潮汐力を考える場合には、地球は全く自転していない場合を考えるべきなのだ。」と書いている。そうだとすると，半田氏自身が認めているように，コリオリ力を見落としていることになるので，式⑮に相当する式をN点 (F 点)に浮遊する物体に働く力の合力と言うことはできない。そのような間違った式で $M' \rightarrow 0$ の極限を考えれば，奇妙な結論が導かれるのは当然のことである。半田氏による奇妙であることの説明は，式⑮が正しい場合（地球が角速度 ω で自転している場合）にも当てはまると読み取れるような文章になっているので，敢えてここで反論した次第である。

文献(3)　松田卓也「間違いだらけの物理学」 学研教育出版(2014/9/2)　 pp.89~91

潮汐力に関する部分と同じ内容のもの（「潮汐力と遠心力を巡るよくある誤解」2013/8/6）が，

jein.jp>基礎科学研究所>科学の散歩道

で見ることができ，「潮汐力」で検索すれば入手できます。

*

「熱中物理」に掲載されている論文の要約　は　こちらへ