シャピロ遅延

§ 1 シャピロ遅延とは何か

慣性系での光速度を c , 万有引力定数を G , 太陽の質量と半径をそれぞれ M , R とする。

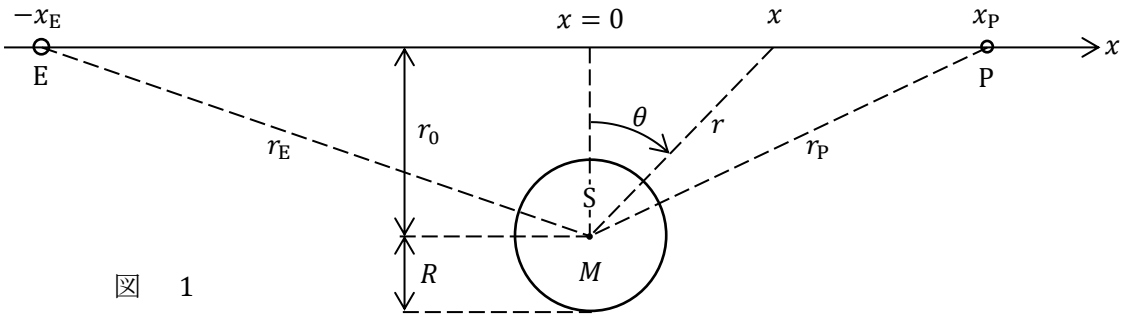

図 1

図 1 のように, 地球 E から惑星 P の向きに x 軸を設定する。太陽 S から x 軸に下した垂線の足を $x=0$ とし, 垂線の長さを r_0 ($r_0 > R$) とする。地球と惑星の x 座標はそれぞれ $-x_{\mathrm{E}}$, x_{P} で, x_{E} と x_{P} は正である。また, $\overline{\mathrm{SE}} = r_{\mathrm{E}}$, $\overline{\mathrm{SP}} = r_{\mathrm{P}}$ とする。

時刻 t_{E} に地球 E から惑星 P に向けて電波のパルスを発射する。そのパルスは時刻 t_{P} に惑星 P の表面で反射し, 時刻 $t_{\mathrm{E}}{}'$ に地球 E に戻ってくる。電波の伝播経路は太陽の重力によって少し曲がるが, ここではその曲がりを無視する。電波が E P 間を往復する間に, 地球 E と惑星 P は太陽に対して少し動くが, その変位は無視できるものとする。

もし太陽の重力が電波の伝播に影響を与えないとすると,

$$t_{\mathrm{P}} - t_{\mathrm{E}} = t_{\mathrm{E}}{}' - t_{\mathrm{P}} = \frac{x_{\mathrm{E}} + x_{\mathrm{P}}}{c} \tag{1}$$

が成り立つ。しかし実際には, 太陽の重力によって光速度が少し小さくなる。そのために測定される往復時間は, 式 (1) の 2 倍より少し長くなり,

$$t_{\mathrm{E}}{}' - t_{\mathrm{E}} = 2\,\frac{x_{\mathrm{E}} + x_{\mathrm{P}}}{c} + \Delta t_{\mathrm{S}} \tag{2}$$

と表される。Δt_{S} をシャピロ (時間) 遅延 (Shapiro time delay) という。

これは一般相対論的効果と考えられるので, 一般相対論に基づいて Δt_{S} を求め, それと実際の電波による測定値を突き合わせれば, 一般相対論の 4 番目の検証実験になるとシャピロは考えた。1964 年に一般相対論に基づいてシャピロが得た Δt_{S} は,

$$\Delta t_{\mathrm{S}} = \frac{4GM}{c^3}\left\{\log\left(\frac{x_{\mathrm{P}} + \sqrt{{x_{\mathrm{P}}}^2 + {r_0}^2}}{-x_{\mathrm{E}} + \sqrt{{x_{\mathrm{E}}}^2 + {r_0}^2}}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x_{\mathrm{P}}}{\sqrt{{x_{\mathrm{P}}}^2 + {r_0}^2}} + \frac{2x_{\mathrm{E}} + x_{\mathrm{P}}}{\sqrt{{x_{\mathrm{E}}}^2 + {r_0}^2}}\right)\right\} \tag{3}$$

と表される (**文献 1**) 。その数年後に, シャピロたちは, 水星と金星に電波を発射することによって Δt_{S} を測定し, 理論値と合う結果を得た。現在では, 宇宙探査機を用いた測定などから, 少し修正を加えた式 (3) が高い精度で成り立つことが確かめられている。

この解説文では, まずシャピロの理論計算を再現したあと, 同じ結果が, 一般相対論を用いることなく, 具体的には計量テンソル g_{ij} を持ち出すことなく, 特殊相対論と等価原理に基づいて導出されることを示す。

§ 2　一般相対論による導出

この計算はさまざまな専門書や論文に載っているが，ここでは（**文献 2**）の計算を書き写す。

質量 M の質点による重力場に対するアインシュタイン方程式のシュバルツシルト解は，

$$(\mathrm{d}s)^2 = -\left(1-\frac{2GM}{c^2\,r}\right)(c\mathrm{d}t)^2 + \left(1-\frac{2GM}{c^2\,r}\right)^{-1}(\mathrm{d}r)^2 + r^2\{(\mathrm{d}\theta)^2 + \sin^2\theta\,(\mathrm{d}\varphi)^2\} \quad (4)$$

と表される。（**文献 3の §6**）。

図 1 に示されているような経路に沿って進む電波に対しては，$(\mathrm{d}s)^2 = 0$，$(\mathrm{d}\varphi)^2 = 0$ として，

$$c^2\,(\mathrm{d}t)^2 = \frac{1}{\left(1-\frac{2GM}{c^2\,r}\right)^2}(\mathrm{d}r)^2 + \frac{1}{\left(1-\frac{2GM}{c^2\,r}\right)}r^2\,(\mathrm{d}\theta)^2 \quad (5)$$

が成り立つ。図 1 の x 軸上の点（r，θ）に対しては，$r_0 = r\cos\theta$ が成り立ち，この両辺の微分を取れば，$0 = (\mathrm{d}r)\cos\theta - r\sin\theta\,(\mathrm{d}\theta)$ となる。これより，

$$r^2\,(\mathrm{d}\theta)^2 = \frac{1}{\tan^2\theta}(\mathrm{d}r)^2 = \frac{{r_0}^2}{r^2-{r_0}^2}(\mathrm{d}r)^2$$

を得る。これを式 (5) に代入して，$\mathrm{d}t$ と $\mathrm{d}r$ の関係式を求めれば，次のようになる。

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}r}{c}\sqrt{\frac{1}{\left(1-\frac{2GM}{c^2\,r}\right)^2} + \frac{1}{\left(1-\frac{2GM}{c^2\,r}\right)}\frac{{r_0}^2}{r^2-{r_0}^2}} \quad (6)$$

以下では，太陽系のような弱い重力場，すなわち，$\frac{2GM}{r} \ll c^2$ が成り立つ場合を考える。

このとき，$\frac{2GM}{c^2\,r}$ の 2 次以上の微小量を無視して近似計算をすれば，

$$\mathrm{d}t = \frac{r}{\sqrt{r^2-{r_0}^2}}\left(1+\frac{2GM}{c^2\,r} - \frac{GM}{c^2\,r}\frac{{r_0}^2}{r^2}\right)\frac{\mathrm{d}r}{c} \quad (7)$$

となる。ここで，初等積分 ：

$$\int \frac{r}{\sqrt{r^2-{r_0}^2}}\,\mathrm{d}r = \sqrt{r^2-{r_0}^2}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{r^2-{r_0}^2}}\,\mathrm{d}r = \log\left(r+\sqrt{r^2-{r_0}^2}\right)$$

$$\int \frac{{r_0}^2}{r^2\sqrt{r^2-{r_0}^2}}\,\mathrm{d}r = \frac{\sqrt{r^2-{r_0}^2}}{r}$$

を用いて，式 (7) の左辺を t_E から t_P まで積分し，右辺を r_0 から r_E まで積分したものと，r_0 から r_P まで積分したものの和をとれば，次の式を得る。

$$\begin{aligned} t_\mathrm{P} - t_\mathrm{E} = {} & \frac{1}{c}\left\{\sqrt{{r_\mathrm{E}}^2-{r_0}^2} + \sqrt{{r_\mathrm{P}}^2-{r_0}^2}\right\} \\ & + \frac{2GM}{c^3}\left\{\log\left(\frac{r_\mathrm{E}+\sqrt{{r_\mathrm{E}}^2-{r_0}^2}}{r_0}\right) + \log\left(\frac{r_\mathrm{P}+\sqrt{{r_\mathrm{P}}^2-{r_0}^2}}{r_0}\right)\right\} \\ & - \frac{GM}{c^3}\left\{\frac{\sqrt{{r_\mathrm{E}}^2-{r_0}^2}}{r_\mathrm{E}} + \frac{\sqrt{{r_\mathrm{P}}^2-{r_0}^2}}{r_0}\right\} \end{aligned}$$

これよりシャピロ遅延 Δt_s は次のように表される。

$$\Delta t_{\mathrm{s}} = 2\left\{ (\, t_{\mathrm{P}} - t_{\mathrm{E}} \,) - \frac{x_{\mathrm{E}} + x_{\mathrm{P}}}{c} \right\} \tag{8}$$

$$= \frac{4GM}{c^3}\left\{ \log\left[\frac{\left(r_{\mathrm{E}} + \sqrt{{r_{\mathrm{E}}}^2 - {r_0}^2} \right)\left(r_{\mathrm{P}} + \sqrt{{r_{\mathrm{P}}}^2 - {r_0}^2} \right)}{{r_0}^2} \right] - \frac{1}{2}\left(\frac{x_{\mathrm{E}}}{r_{\mathrm{E}}} + \frac{x_{\mathrm{P}}}{r_{\mathrm{P}}} \right) \right\} \tag{9}$$

式 (9) の自然対数の引数にある $(\, r_{\mathrm{E}} + x_{\mathrm{E}} \,)$ を $(\, r_{\mathrm{E}} + x_{\mathrm{E}} \,)(\, r_{\mathrm{E}} - x_{\mathrm{E}} \,)/(\, r_{\mathrm{E}} - x_{\mathrm{E}} \,) = {r_0}^2/(\, r_{\mathrm{E}} - x_{\mathrm{E}} \,)$ に置き換えれば, この対数項は式 (3) の対数項と一致する。しかし, 式 (3) と式 (9) の第 2 項は一致しない。これについては **§ 4** で説明する。

§ 3 特殊相対論と等価原理による導出

図 1 の x 軸に沿って伝播する電波の速さ $c(x)$ は, $\frac{GM}{c^2 r}$ の 2 次以上の微小量を無視できるなら,

$$c(x) = c \cdot \left(1 - \frac{GM}{c^2\, r} - \frac{GMx^2}{c^2\, r^3} \right) \tag{10}$$

と表される。この式は, シッフ (**文献 4**) によって, 特殊相対論と等価原理を用いて導出された。その計算の要約は (**文献 5**) にある。

式 (10) を用いて, 電波パルスが地球 E から惑星 P まで伝播する時間を求めれば, 次のようになる。

$$t_{\mathrm{P}} - t_{\mathrm{E}} = \int_{t_{\mathrm{E}}}^{t_{\mathrm{P}}} \mathrm{d}t = \int_{-x_{\mathrm{E}}}^{x_{\mathrm{P}}} \frac{\mathrm{d}x}{c(x)} \fallingdotseq \int_{-x_{\mathrm{E}}}^{x_{\mathrm{P}}} \frac{\mathrm{d}x}{c}\left(1 + \frac{GM}{c^2\, r} + \frac{GMx^2}{c^2\, r^3} \right)$$

$$= \int_{-x_{\mathrm{E}}}^{x_{\mathrm{P}}} \frac{\mathrm{d}x}{c}\left\{ 1 + \frac{GM}{c^2}\,\frac{1}{\sqrt{x^2 + {r_0}^2}} + \frac{GM}{c^2}\,\frac{x^2}{\left(\sqrt{x^2 + {r_0}^2} \right)^3} \right\}$$

ここで, 初等積分 **:**

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + {r_0}^2}}\,\mathrm{d}x = \log\left(x + \sqrt{x^2 + {r_0}^2} \right)$$

$$\int \frac{x^2}{\left(\sqrt{x^2 + {r_0}^2} \right)^3}\,\mathrm{d}x = \log\left(x + \sqrt{x^2 + {r_0}^2} \right) - \frac{x}{\sqrt{x^2 + {r_0}^2}}$$

を用いれば,

$$t_{\mathrm{P}} - t_{\mathrm{E}} = \frac{x_{\mathrm{P}} + x_{\mathrm{E}}}{c} + \frac{2GM}{c^3}\left\{ \log\left(\frac{x_{\mathrm{P}} + \sqrt{{x_{\mathrm{P}}}^2 + {r_0}^2}}{-x_{\mathrm{E}} + \sqrt{{x_{\mathrm{E}}}^2 + {r_0}^2}} \right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x_{\mathrm{P}}}{\sqrt{{x_{\mathrm{P}}}^2 + {r_0}^2}} + \frac{x_{\mathrm{E}}}{\sqrt{{x_{\mathrm{E}}}^2 + {r_0}^2}} \right) \right\}$$

となる。よって, シャピロ遅延は,

$$\Delta t_{\mathrm{s}} = 2\left\{ (\, t_{\mathrm{P}} - t_{\mathrm{E}} \,) - \frac{x_{\mathrm{P}} + x_{\mathrm{E}}}{c} \right\}$$

$$= \frac{4GM}{c^3}\left\{ \log\left(\frac{x_{\mathrm{P}} + r_{\mathrm{P}}}{-x_{\mathrm{E}} + r_{\mathrm{E}}} \right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x_{\mathrm{P}}}{r_{\mathrm{P}}} + \frac{x_{\mathrm{E}}}{r_{\mathrm{E}}} \right) \right\} \tag{11}$$

と表され, 式 (9) と同じ式になる。

式 (11) の導出は, 特殊相対論と等価原理に基づいているので, 特殊相対論から一般相対論の世界へ一歩踏み込んだ領域での計算になっている。式 (10) の証明では, 時計の周期ともものさしの特殊相対論によるローレンツ短縮が用いられており, それが一般相対論で論じられる時空の曲がりに対応している。上で計算された 2 つのシャピロ遅延が一致する理由は, この対応関係にある (**補足参照**)。これは重力による光の湾曲についても言える。

§ 4 地球上での固有時間を用いた表現

シャピロ遅延の測定は地球上で行われるので，理論計算で求めるシャピロ遅延は，地球上に静止している時計が示す固有時間 τ で表さなければならない。固有時間 τ と 4 次元時空の座標 ct の関係は，式 (4) より，

$$-c^2(\mathrm{d}\tau)^2 = (\mathrm{d}s)^2 = -\left(1-\frac{2GM}{c^2\,r}\right)c^2(\mathrm{d}t)^2$$

で与えられる。よって，太陽系のような弱い重力場では，

$$\mathrm{d}\tau = \sqrt{1-\frac{2GM}{c^2\,r}}\;\mathrm{d}t \fallingdotseq \left(1-\frac{GM}{c^2\,r}\right)\mathrm{d}t \tag{12}$$

となる。$r \longrightarrow \infty$ のとき $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t$ となるので，座標時間 t は，太陽から十分遠く離れたところに静止している観測者 0 の固有時間でもある。よって，式 (9) の Δt_{s} は観測者 0 にとってのシャピロ遅延である。

一方，式 (10) の光速度 $c(x)$ は，観測者 0 から見たときに，電波パルスが x 方向に伝わる速さである（**文献 5** の 10 頁 ～11 頁）。したがって，式 (11) は観測者 0 から見たシャピロ遅延である。

式 (9) と式 (11) を地球上の観測者が見たときの式に変換する。そのために，式 (8) の両辺に $\left(1-\frac{GM}{c^2\,r_{\mathrm{E}}}\right)$ を掛けて変形すると，次のようになる。

$$\left(1-\frac{GM}{c^2\,r_{\mathrm{E}}}\right)2\,(\,t_{\mathrm{P}}-t_{\mathrm{E}}\,) = \left(1-\frac{GM}{c^2\,r_{\mathrm{E}}}\right)\left(2\,\frac{x_{\mathrm{E}}+x_{\mathrm{P}}}{c}+\Delta t_{\mathrm{s}}\right)$$

$$\overset{(12)}{\longrightarrow}\quad 2\,(\,\tau_{\mathrm{P}}-\tau_{\mathrm{E}}\,) \fallingdotseq 2\,\frac{x_{\mathrm{E}}+x_{\mathrm{P}}}{c}+\Delta t_{\mathrm{s}}-\frac{GM}{c^2\,r_{\mathrm{E}}}\,2\,\frac{x_{\mathrm{E}}+x_{\mathrm{P}}}{c}$$

ただし，$\frac{GM}{c^2\,r_{\mathrm{E}}}$ の 2 次の微小量は無視した。よって，地球上の観測者にとってのシャピロ遅延は，

$$\Delta\tau_{\mathrm{s}} = 2\left\{(\,\tau_{\mathrm{P}}-\tau_{\mathrm{E}}\,)-\frac{x_{\mathrm{E}}+x_{\mathrm{P}}}{c}\right\} = \Delta t_{\mathrm{s}}-\frac{2GM}{c^3}\,\frac{x_{\mathrm{E}}+x_{\mathrm{P}}}{r_{\mathrm{E}}}$$

$$= \frac{4GM}{c^3}\left\{\log\left(\frac{x_{\mathrm{P}}+r_{\mathrm{P}}}{-x_{\mathrm{E}}+r_{\mathrm{E}}}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{x_{\mathrm{P}}}{r_{\mathrm{P}}}+\frac{2x_{\mathrm{E}}+x_{\mathrm{P}}}{r_{\mathrm{E}}}\right)\right\} \tag{13}$$

となり，式 (3) と一致する。

すなわち，観測者 0 から地球上の観測者へシャピロ遅延を変換するときには，式 (9)，式 (11) の第 2 項から，$\frac{GM}{c^3}\,\frac{2(x_{\mathrm{E}}+x_{\mathrm{P}})}{r_{\mathrm{E}}}$ を減じればよい。

この変換以外にも，式 (3) の第 2 項は，伝播経路の直線からのずれや伝播中の地球の運動によっても影響を受ける。さらに，シュバルツシルト座標ではなく，等方座標を用いても，この第 2 項の表式は変わってくる。これらについては（**文献 2**）が言及している。等方座標については，専門書以外では，（**文献 6**）に簡単な説明がある。

式 (13) は，$r_0 \ll r_{\mathrm{E}}$，r_{P}，したがって，$r_{\mathrm{E}} \fallingdotseq x_{\mathrm{E}}$，$r_{\mathrm{P}} \fallingdotseq x_{\mathrm{P}}$ が成り立つ場合，次のような近似式で表される。

$$\Delta\tau_{\mathrm{s}} \fallingdotseq \frac{4GM}{c^3}\left\{\log\left(\frac{4\,r_{\mathrm{E}}\,r_{\mathrm{P}}}{{r_0}^2}\right)-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\,\frac{r_{\mathrm{P}}}{r_{\mathrm{E}}}\right\} \tag{14}$$

具体例として，惑星 P が水星の場合には，r_{P}（長半径）$/\, r_{\mathrm{E}} = 0.387$ ，

$$\frac{4GM}{c^3} = \frac{4 \times 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2} \times 1.99 \times 10^{30}\ \mathrm{kg}}{(\,3.00 \times 10^{8}\ \mathrm{m/s}\,)^3} = 19.7\ \mu\mathrm{s}\ ,$$

$$\frac{r_{\mathrm{E}}}{R} = \frac{1.50 \times 10^{11}\ \mathrm{m}}{6.96 \times 10^{8}\ \mathrm{m}} = 216 \quad , \quad \frac{r_{\mathrm{P}}}{R} = \frac{5.79 \times 10^{10}\ \mathrm{m}}{6.96 \times 10^{8}\ \mathrm{m}} = 83.2$$

である。これらを用いて，式 (14) を書き換えれば，

$$\Delta\tau_{\mathrm{s}} \fallingdotseq 19.7\ \mu\mathrm{s} \times \left\{ 9.49 - 2\log\left(\frac{r_0}{R}\right) \right\} \tag{15}$$

となる。横軸に $r_0\ /\ R$ ，縦軸に $\Delta\tau_{\mathrm{s}}\ /\ \mu\mathrm{s}$ を取って，式 (15) をグラフで表せば，図 2 のようになる。

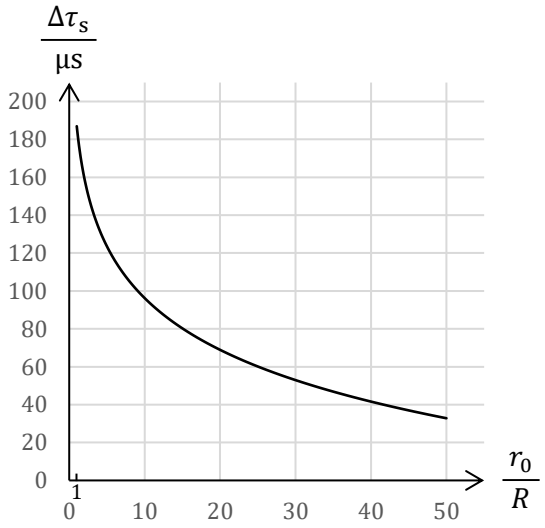

図　2

（補足）

§ 2 と **§ 3** の計算から推測できるように，実は，両者は同じ式を用いて計算しているのである。まず，どちらも図 1 のような直線の伝播経路を仮定しているので，

$$r_0 = r\cos\theta \ , \quad x = r\ \sin\theta$$

が成り立つ。これらの両辺の微分を取って，$\mathrm{d}x$ と $\mathrm{d}r$ の関係式を求めれば，

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}r}{\sin\theta} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - {r_0}^2}}\ \mathrm{d}r$$

となる。次に，弱い重力場を仮定すれば，式 (7) より，

$$c\mathrm{d}t = \mathrm{d}x\left(1 + \frac{2GM}{c^2 r} - \frac{GM}{c^2 r}\,\frac{r^2 - x^2}{r^2}\right)$$

$$= \mathrm{d}x\left(1 + \frac{GM}{c^2\, r} + \frac{GMx^2}{c^2 r^3}\right)$$

を得る。よって，x 軸に沿って進む電波の速さは，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \fallingdotseq c\left(1 - \frac{GM}{c^2\, r} - \frac{GMx^2}{c^2 r^3}\right) \tag{16}$$

となり，式 (10) と一致する。

式(16)は，式(4)の計量テンソル成分 $g_{tt} = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)$ と $g_{rr} = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1}$ を基にして，弱い重力場と直線伝播経路という2つの仮定から求められている。

一方，式(10)は等価原理を基にして，同じ2つの仮定から求められている。その導出過程では，特殊相対論が用いられており，時計の周期のローレンツ短縮によって式(10)の第2項が導かれ，ものさしのローレンツ短縮によって式(10)の第3項が導かれている。

これらからわかるように，時空の曲がりがローレンツ短縮に対応しているのである。

(文献)

1. I . I . Shapiro ： Fourth Test of General Relativity , Phys . Rev . Lett . 13(26) , 789 - 791

2. MathPages Shapiro Time Delay
   https://www.mathpages.com/home/iphysics.htm

3. 佐藤勝彦 ：岩波基礎物理シリーズ 9 「相対性理論」

4. L . I . Schiff ： On Experimental Tests of the General Theory of Relativity ,
   Am . J . Phys . 28 , 340 (1960)

5. 重力場での光の赤方偏移・時間の遅れ・光の湾曲
   https://www.eonet.ne.jp/~excitingphysics/hikarinowankyoku.pdf

6. M . Pössel： The Shapiro time delay and the equivalence principle
   https://arxiv.org/pdf/2001.00229v1

「熱中物理」に掲載されている論文の要約 は こちらへ