サニャック効果

回転する平面上に光の閉じた伝播経路があるとき，ある断面でその経路に入射した光が二つに分かれて逆向きに一周すると，それらの間に位相差が生じる。これをサニャック効果という。位相差が生じる理由は特殊相対論によって説明される。伝播経路の回転速度が慣性系の真空中での光速度 c より十分小さいときには，その位相差は，

$$\phi = \frac{8\,\pi\,\nu\,A\,\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\omega}}{c^2} \tag{1}$$

と表される。ここに，ν は伝播する光の振動数，A は閉じた経路で囲まれた平面の面積，$\overrightarrow{n}$ は平面の単位法線ベクトル，$\overrightarrow{\omega}$ は平面の回転角速度である。

実際に式 (1) が成り立つことは，実験によって検証されている。

まずは，単純な装置で式 (1) が成り立つことを示す。

図　1

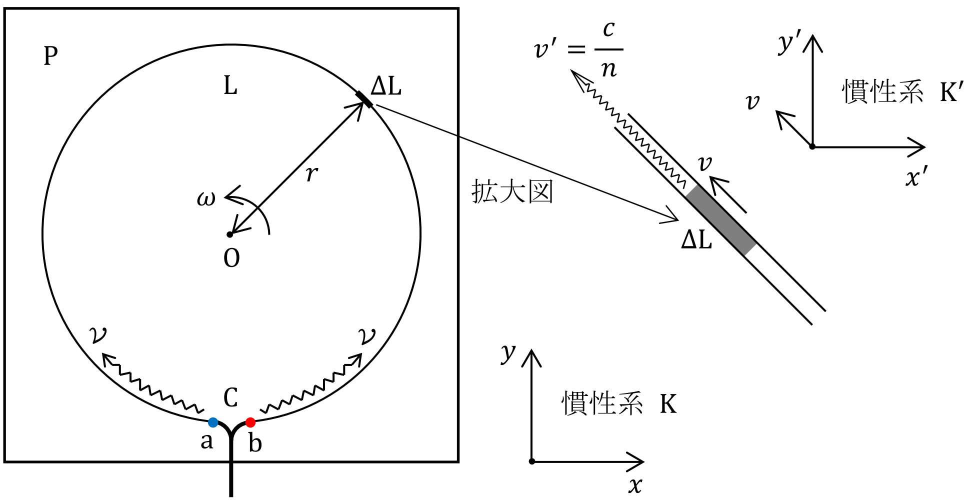

図 1 のように，平板 P に半径 r の光の環状経路 L が固定されており，慣性系 K から見て，その中心 O を通る平板 P の法線を回転軸として，平板 P が角速度 ω で反時計まわりに回転しているとする。経路 L は屈折率 n の光ファイバーで，外から入射した振動数 ν の光は断面 C で 2 つに分かれ，それぞれが経路 L を一周したあと，C から外へ出ていく。経路 L の両端 a と b の間隔は円周 $2\,\pi\,r$ に比べれば無視できる

光が経路 L を反時計まわりに伝播する場合には，その向きを速度の正の向きとする。経路 L の微小部分 ΔL は，慣性系 K に対して速度 $v = +\,r\,\omega$ で運動している。このとき ΔL と同じ速度で等速度運動する慣性系 K′ を導入する。ΔL を通過する光を慣性系 K′ から見れば，その波面は速度 $v' = +\dfrac{c}{n}$ で伝播する。ここで特殊相対論の速度合成則を用いて，慣性系 K から見たときの波面の伝播速度 c^+ を求めれば，

$$c^+ = \frac{v + v'}{1 + \dfrac{v\,v'}{c^2}} = \frac{r\,\omega + \dfrac{c}{n}}{1 + \dfrac{r\,\omega}{c\,n}} = \frac{c}{n}\left(1 + \frac{n\,r\,\omega}{c}\right)\left(1 + \frac{r\,\omega}{c\,n}\right)^{-1} \tag{2}$$

となる。$r\,\omega \ll c$ の場合には，近似的に次の式が成り立つ。

$$c^{+} \fallingdotseq \frac{c}{n}\left(1+\frac{n\,r\,\omega}{c}\right)\left(1-\frac{r\,\omega}{n\,c}\right) \fallingdotseq \frac{c}{n}+r\,\omega\left(1-\frac{1}{n^{2}}\right) \tag{3}$$

光が経路 L を時計まわりに伝播する場合には，その向きを速度の正の向きとする。上と同様の計算をすれば，慣性系 K から見たときの波面の伝播速度 c^{-} は，

$$c^{-} = \frac{(-v)+v'}{1+\dfrac{(-v)\,v'}{c^{2}}} \fallingdotseq \frac{c}{n}-r\,\omega\left(1-\frac{1}{n^{2}}\right) \tag{4}$$

となる。

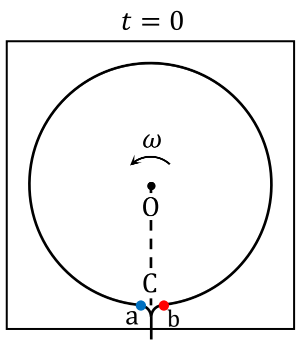

図　2a

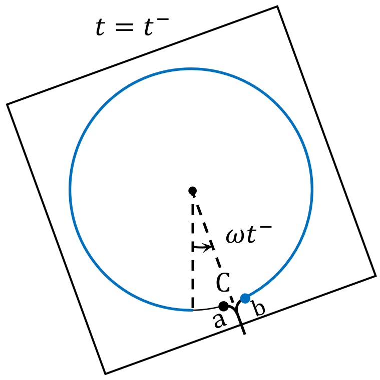

図　2b

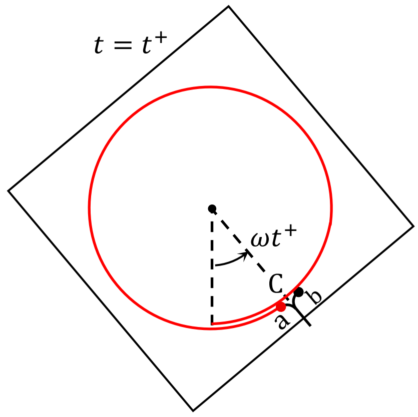

図　2c

つぎに，図 2a のように，光の先端が断面 C に入射する時刻を $t=0$ とする。慣性系 K から見たとき，図 2b のように，時刻 t^{-} に，時計まわりに伝播した光の先端が b 端に達したとすると，断面 C の回転距離を ℓ^{-} として，

$$\ell^{-} = r\,\omega\,t^{-} \quad , \qquad t^{-} = \frac{2\,\pi\,r-\ell^{-}}{c^{-}} \tag{5}$$

が成り立つ。これらより ℓ^{-} を消去して t^{-} を求めれば，

$$t^{-} = \frac{2\,\pi\,r}{c^{-}+r\,\omega} = \frac{2\,\pi\,r}{\dfrac{c}{n}+\dfrac{r\,\omega}{n^{2}}} \tag{6}$$

となる。同様に，図 2c のように，時刻 t^{+} に反時計まわりに伝播した光の先端が a 端に達したとすると，

$$t^{+} = \frac{2\,\pi\,r}{c^{+}-r\,\omega} = \frac{2\,\pi\,r}{\dfrac{c}{n}-\dfrac{r\,\omega}{n^{2}}} \tag{7}$$

となる。よって，2 つの光が経路 L を一周する時間の差は，

$$\varDelta t = t^{+}-t^{-} = 2\,\pi\,r\,\frac{\dfrac{2\,r\,\omega}{n^{2}}}{\left(\dfrac{c}{n}\right)^{2}-\left(\dfrac{r\,\omega}{n^{2}}\right)^{2}} \tag{8}$$

となる。$r\,\omega \ll c$ で，$(\,r\,\omega \ll c\,)^{2}=0$ と見なせる場合には，

$$\varDelta t \fallingdotseq \frac{4\,\pi\,r^{2}\,\omega}{c^{2}} = \frac{4\,A\,\omega}{c^{2}} \tag{9}$$

と近似することができる。ただし，$A=\pi\,r^{2}$ は経路 L で囲まれた平面の面積である。

断面 C から外へ出ていく 2 つの光の位相差は，

$$\phi = 2\pi\nu\Delta t = \frac{8\pi\nu A\omega}{c^2} \tag{10}$$

となり，式 (1) が導かれる。

式 (10) の ϕ は，光ファイバーの屈折率 n に依存しない。不思議な気がするが，これは，$r\omega \ll c$ を仮定して近似計算をしたからである。$r\omega \sim c$ であるような強い重力場でサニャック効果を考えれば，ϕ は n に依存する。そのときには一般相対論を用いて論じなければならない。

式 (2) と式 (4) はローレンツ変換に基づく速度合成則である。ガリレイ変換に基づく速度合成則 ：

$$c^{+}_{\mathrm{gal}} = v + v' = r\omega + \frac{c}{n}\ , \qquad c^{-}_{\mathrm{gal}} = -v + v' = -r\omega + \frac{c}{n}$$

を用いて計算すれば，

$$\Delta t_{\mathrm{gal}} = t^{+}_{\mathrm{gal}} - t^{-}_{\mathrm{gal}} = \frac{2\pi r n}{c} - \frac{2\pi r n}{c} = 0$$

となり，サニャック効果は生じない。このことから，サニャック効果では特殊相対論が本質的な役割を果たしていることがわかる。

実際の実験で，光源 S と位相差 ϕ を測定する干渉計 I が実験室（静止系）にある場合には，これらと回転経路 L をつなぐ方法を工夫しなければならない。一例として，図 3 のように，反射鏡や半透鏡を用いて，空気中を伝わるレーザー光でつなぐ方法が考えられる。しかし，慣性航法の角速度計のような実用例では，図 4 のように，光源 S と干渉計 I を回転平板 P に乗せて位相差 ϕ を測定する。このとき，干渉計 I に入射する 2 つの光の到達時間差を $\Delta t'$ とすると，慣性系で測定される時間差 Δt との間に，ローレンツ短縮 ：

$$\Delta t' = \Delta t\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}\ , \qquad V = R\omega \tag{11}$$

が成り立つ。通常の実用例では，$V \ll c$ であるから，$\Delta t' \fallingdotseq \Delta t$ であり，慣性系 K あるいは回転平板 P 上のいずれで測定しても，位相差 ϕ の測定値は同じと見なせる。

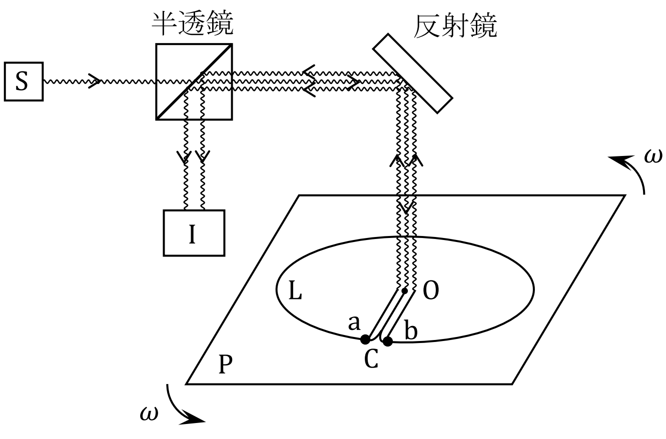

図　3

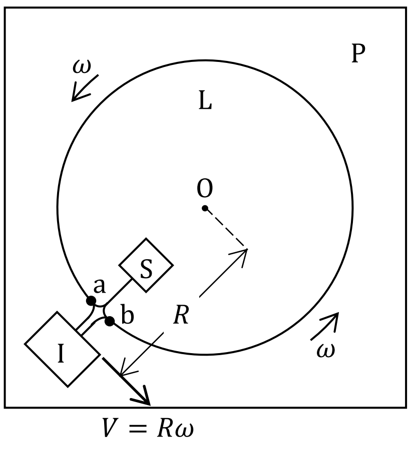

図　4

最後に，式 (1) が一般的な状況で成り立つことを，特殊相対論を用いて示す。

図 5 のように，慣性系 K に対して，平面 P が点 O を通る法線のまわりに角速度 $\vec{\omega}$ で回転しており，平面 P には屈折率 n の閉じた光の伝播経路 L が固定されている。この経路を振動数 ν の光が図の矢印の向きに伝播している。

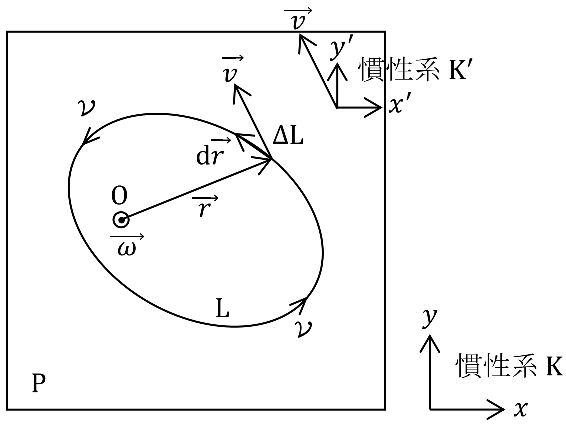

図　5

点 O を原点として位置 $\vec{r}$ にある経路の微小部分 ΔL の長さを $|\,\mathrm{d}\vec{r}\,|$ とする。$\mathrm{d}\vec{r}$ の向きは光が伝播する向きである。微小部分 ΔL の回転速度 $\vec{\omega}\times\vec{r}$ を $\vec{v}$ で表す。ここで，慣性系 K に対して等速度 $\vec{v}$ で ΔL に並走する座標系 K′ を考える。K′ は慣性系であるから，K′ では真空中を伝わる光の速度はどの方向でも c であるが，K′ から見て静止している微小部分 ΔL の中を伝播する光の位相速度 c_n は $c\,/\,n$ である。

慣性系 K′ から見た微小部分 ΔL の長さを $|\,\mathrm{d}\vec{r}\,'\,|$ とすれば，光が ΔL を通過する時間 $\mathrm{d}t_+{}'$ は，

$$\mathrm{d}t_+{}' = \frac{1}{c_n}\,|\,\mathrm{d}\vec{r}\,'\,| \tag{12}$$

となる。これを慣性系 K から見たとき，光が微小経路 ΔL を通過する時間を $\mathrm{d}t_+$ とすれば，ローレンツ変換によって，

$$\mathrm{d}t_+{}' = \gamma\left(\mathrm{d}t_+ - \frac{\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{r}}{c^2}\right),\qquad \mathrm{d}\vec{r}\,' = \gamma\,(\,\mathrm{d}\vec{r} - \vec{v}\,\mathrm{d}t_+\,) \tag{13}$$

が成り立つ。ただし，$\gamma = 1\Big/\sqrt{1-\left(\frac{|\,\vec{v}\,|}{c}\right)^2}$ である。これの逆変換は，

$$\mathrm{d}t_+ = \gamma\left(\mathrm{d}t_+{}' + \frac{\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{r}\,'}{c^2}\right),\qquad \mathrm{d}\vec{r} = \gamma\,(\,\mathrm{d}\vec{r}\,' + \vec{v}\,\mathrm{d}t_+{}'\,) \tag{14}$$

となる。通常の回転運動では，$|\,\vec{v}\,| \ll c$ であるから，$(\,|\,\vec{v}\,|\,/\,c\,)^2 = 0$ として，$|\,\vec{v}\,|\,/\,c$ の 1 次の微小量だけを残せば，

$$\mathrm{d}t_+ \fallingdotseq \mathrm{d}t_+{}' + \frac{\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{r}\,'}{c^2} \fallingdotseq \mathrm{d}t_+{}' + \frac{\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{r}}{c^2} \tag{15}$$

となる。ただし，$\mathrm{d}\vec{r}\,'$ と $\mathrm{d}\vec{r}$ の差は $|\,\vec{v}\,|\,/\,c$ の 1 次の微小量であることを用いた。

次に，光が経路 L を時計まわりに伝播するときには，$\mathrm{d}\vec{r}\,'$ の向きが逆になるので，上記の式で $\mathrm{d}\vec{r}\,'$ を $-\,\mathrm{d}\vec{r}\,'$ に置き換えれば，光が微小部分 ΔL を通過する時間は，

$$\text{K}' \text{ 系では,} \quad \mathrm{d}t_-' = \frac{1}{c_n} \,|-\mathrm{d}\vec{r}\,'| = \mathrm{d}t_+' \tag{16}$$

$$\text{K 系では,} \quad \mathrm{d}t_- \fallingdotseq \mathrm{d}t_-' - \frac{\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{r}\,'}{c^2} \fallingdotseq \mathrm{d}t_-' - \frac{\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{r}}{c^2} \tag{17}$$

となる。

これら 2 つの光が経路 L を同時に伝播するときには，2 つの光が L を一周する時間の差 Δt は，

$$\Delta t = \int (\,\mathrm{d}t_+ - \mathrm{d}t_-\,) = \oint 2\,\frac{\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{r}}{c^2} \tag{18}$$

となる。ストークスの定理を用いてこれを書き換え，$\vec{v}$ を $\vec{\omega}\times\vec{r}$ に戻せば，

$$\Delta t = \frac{2}{c^2}\int (\,\vec{\nabla}\times\vec{v}\,)\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \frac{2}{c^2}\int \{\vec{\nabla}\times(\,\vec{\omega}\times\vec{r}\,)\}\cdot\mathrm{d}\vec{s} \tag{19}$$

となる。面積分を平面 P上で行えば，$\mathrm{d}\vec{s}$ は経路 Lで囲まれた平面の面積要素となり，その向きは $\vec{\omega}$ と同じ向きになる。

ここでは，平面 P が剛体回転する場合を想定しており，光が L を一周するぐらいの時間では，$\vec{\omega}$ は一定ベクトルと考えてよいので，

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times(\,\vec{\omega}\times\vec{r}\,) &= \vec{\omega}\,(\,\vec{\nabla}\cdot\vec{r}\,) - \vec{r}\,(\,\vec{\nabla}\cdot\vec{\omega}\,) + (\,\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\,)\,\vec{\omega} - (\,\vec{\omega}\cdot\vec{\nabla}\,)\,\vec{r} \\ &= 3\,\vec{\omega} - 0 + 0 - \vec{\omega}\end{aligned} \tag{20}$$

となる。よって，

$$\Delta t = \frac{4}{c^2}\int \vec{\omega}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \frac{4\,A\,\omega}{c^2} \tag{21}$$

と表される。A は経路 L で囲まれた平面の面積である。よって，2 つの光を外へ取り出して慣性系 K で測定したときの位相差は，

$$\phi = 2\,\pi\,\nu\,\Delta t = \frac{8\,\pi\,\nu\,A\,\omega}{c^2} \tag{22}$$

となる。この結果が示すように，位相差 ϕ は，

（ア） 経路 L の形に依らず，

（イ） 回転軸 O の位置に依らず

（ウ） 経路 L の屈折率 n に依らない。

「熱中物理」に掲載されている論文の要約 は こちらへ